Fizyka techniczna – ALGEBRA – Kartkówka 2

20 pkt

Zad.1 Typ układu równań w zależności od $p \in \mathbb{R}$ + Rozwiązanie dla $p=-2$

$$\mathcal{U}=[A|B]=\left[\begin{array}{cccc|c} p-1 & 1 & p+2 & p & 1 \\ 0 & p+2 & 0 & 3 & p+5 \\ 2p-2 & 2 & p+4 & 2p+2 & 5 \\ p-1 & 1 & p+4 & p+3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4-w_1]{w_3-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} p-1 & 1 & p+2 & p & 1 \\ 0 & p+2 & 0 & 3 & p+5 \\ 0 & 0 & -p & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} p-1 & 1 & p & p+2 & 1 \\ 0 & p+2 & 3 & 0 & p+5 \\ 0 & 0 & 2 & -p & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \\ \;x_1 \quad\; x_2 \quad\; x_4 \quad\; x_3 \end{array} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} p-1 & 1 & p & p+2 & 1 \\ 0 & p+2 & 3 & 0 & p+5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -p & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} p-1 & 1 & p & p+2 & 1 \\ 0 & p+2 & 3 & 0 & p+5 \\ 0 & 0 & 1 & 2+p & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -p & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4-2w_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} p-1 & 1 & p & p+2 & 1 \\ 0 & p+2 & 3 & 0 & p+5 \\ 0 & 0 & 1 & 2+p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3p-4 & 1 \end{array}\right]$$

(1) $p \in \mathbb{R} \setminus \{1,-2,-\frac{4}{3}\}$ układ oznaczony, jedno rozwiązanie

(2) $p=1$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$
układ sprzeczny

(3) $p=-2$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & +2 & 1 \end{array}\right]$$
$r(A)=r(\mathcal{U})=3$ układ nieozn. / 1 parametr

(4) $p=-4/3$ ostatnie równanie sprzeczne → ukł. sprzeczny

Zad.2
$$\begin{cases} ax+y=1 \\ 2x-y=a \\ x+y=a \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{U}=[A|B]=\left[\begin{array}{cc|c} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & a \end{array}\right]$$

$\det \mathcal{U} = -a^2+2+a+1-a^2-2a$
$= -2a^2-a+3 = -(2a+3)(a-1)$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{1,-\frac{3}{2}\}$ $r(\mathcal{U})=3 \neq r(A)$

P a) $\forall a>1$ ukł. sprzeczny

P b) ukł. oznaczony $\iff r(A)=r(\mathcal{U})=2 \iff a \neq 1,\ a \neq -\frac{3}{2}$

F c) $\exists a \in \mathbb{R}$: ukł. nieoznaczony $r(A)<n=2$ niemożliwe $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Zad.3 $\det C \cdot (X+2I)^{-1}B^4 + D^{-1}D^TC^{-1}B^3 = 0$ $B,C,D \in M_4(\mathbb{R})$ nieosobliwe

D-antysymetryczna $\iff D^T=-D$

$C=[a_{ij}]$; $a_{ij}=\begin{cases} 0 & ; i\neq j \\ -5+i & ; i=j \end{cases}$
$$C=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$\det C = 2 \cdot 12 = 24$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & -4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -3 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 0 & -4 & -9 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -9 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Równanie ma postać

$$24 \cdot (X+2I)^{-1}B^4 = \underbrace{-D^{-1}D^T}_{I}C^{-1}B^3 = C^{-1}B^3 \quad / \cdot B^{-4}$$

$$24(X+2I)^{-1} = C^{-1}B^{-1} = (BC)^{-1}$$

$$X+2I = \left[\frac{1}{24}(BC)^{-1}\right]^{-1}$$

$$X = -2I + 24BC$$

$$X = -24\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zad.4 $\Pi_1: 4x+2y-z+2=0$ $\quad l: x=-2y-2=z+1$ $\quad \vec{v}=[-1,-2,-3]$

$P_1=(0,3,2)$ $\quad P_0=(5,-1,6)$ $\quad B=(2,-3,4)$

- A - rzut ukośny P_0 na l w kierunku $\vec{v}$

$l: \frac{x-0}{1}=\frac{y-(-1)}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-(-1)}{1}$ $\quad \vec{a}=[1,-\frac{1}{2},1] \parallel l$ $\quad l: \begin{cases} x=0+t \\ y=-1-\frac{1}{2}t \\ z=-1+t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$

$k \parallel \vec{v}$, $P_0 \in k$ $\quad k: \begin{cases} x=5-s \\ y=-1-2s \\ z=6-3s \end{cases}$ $s\in\mathbb{R}$

$\{A\}=k\cap l$

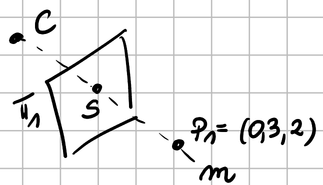
$A\in k$ $\quad s=1$ $\quad A=(4,-3,3)$

$\begin{cases} t=5-s \\ -1-\frac{1}{2}t=-1-2s \\ -1+t=6-3s \end{cases}$ $\quad \begin{cases} t=5-s \\ \frac{1}{2}t=2s \\ -1+t=6-3s \end{cases}$

$t=5-s \wedge t=4s \Rightarrow 5-s=4s$, $5s=5$, $\underline{\underline{s=1}}$

$t=5-1=4$ // $\quad$ Spr. $-1+t=-1+4=3=6-3s=6-3$

- C - punkt symetryczny do P_1 wzgl. Π_1



$m: \begin{cases} x=0+4t \\ y=3+2t \\ z=2-t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$

$\vec{n}\perp\Pi_1$ $\quad \vec{n}=[4,2,-1]$

$\Pi_1\cap m=\{S\}$

$4\cdot(4t)+2(3+2t)-(2-t)+2=0$

$16t+6+4t-\cancel{2}+t+\cancel{2}=0$

$21t=-6$ $\quad t=\frac{-6}{21}=\frac{-2}{7}$

$S=(-\frac{8}{7}, 3-\frac{4}{7}, 2+\frac{2}{7})=(-\frac{8}{7},\frac{17}{7},\frac{16}{7})$

$\overrightarrow{P_1S}=(-\frac{8}{7},-\frac{4}{7},\frac{2}{7})$

$C=T_{\overrightarrow{P_1S}}(S)=(-\frac{8}{7}-\frac{8}{7}, \frac{17}{7}-\frac{4}{7}, \frac{16}{7}+\frac{2}{7})$

$=(-\frac{16}{7},\frac{13}{7},\frac{18}{7})$