WFiIS, fizyka techniczna, I rok, grupa 1 19 grudnia 2024r.

ALGEBRA - Kartkówka 3

Łącznie można otrzymać 30 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. *(4,5 pkt) Czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe? Odpowiedź uzasadnij.*

Dane są wektory $p = x^4 - x^2 + x,\ q = x^4 + 2x^3 + x^2 + 1,\ r = x^3 + x + 10,\ s = 1\ \in \mathbb{R}_4[x]$.

a) *Układ* $\{p, q, r, s\}$ *jest układem liniowo zależnym.*

b) *Układ* $\{p, q, r, s\}$ *stanowi bazę przestrzeni* $\mathbb{R}_4[x]$.

c) $-x - 1 \in \operatorname{lin}\{p, q, r, s\}$

Zadanie 2. *(3+2 pkt) Podaj i uzasadnij odpowiedź na poniższe pytania.*

a) *Czy* $U = \{f \in \mathbb{R}_2[x] :\ f(1) = 0\ \vee\ f'(2) = 0\}$ *jest podprzestrzenią liniową* $\mathbb{R}_2[x]$?

b) *Czy odwzorowanie* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ *dane wzorem* $\varphi(x) = (0, x + 1, \pi x, -x)$ *jest liniowe?*

Zadanie 3. *(3 + 6,5 pkt) W przestrzeniach* $\mathbb{R}^2$ *i* $\mathbb{R}^3$ *rozważamy odpowiednio bazy* $\mathcal{B}$ *oraz* $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{B} = \Big(b_1 = (1,1), b_2 = (2,1)\Big) \qquad \mathcal{C} = \Big(c_1 = (1,2,0), c_2 = (2,3,0), c_3 = (0,0,1)\Big)$$

Dane jest odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *takie, że* $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) *Nie wyznaczając wzoru odwzorowania* φ, *a posługując się jedynie macierzą* A' *wyznacz obraz wektora* $v = (5, 0)$ *poprzez* φ *i podaj współrzędne* $\varphi(5, 0)$ *w bazie kanonicznej* $\mathbb{R}^3$.

b) *Podaj wzór odwzorowania* φ.

Zadanie 4. *(2 + 4,5 pkt) Odwzorowanie liniowe* $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ *dane jest wzorem*

$$\forall p \in \mathbb{R}_2[x] \quad \varphi(p)(x) = 2x \cdot p'(x) + x^2 \cdot p(0) + p(2).$$

a) *Wyznacz macierz* $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, *gdy* $\mathcal{B} = \big(1, x, x^2\big)$.

b) *Wyznacz podprzestrzeń* $Ker(\varphi)$, *podaj jej dowolną bazę i określ wymiar. Czy* φ *jest monomorfizmem / epimorfizmem?*

Zadanie 5. *(4,5 pkt) Dana jest podprzestrzeń liniowa* $U = \{p \in \mathbb{R}_3[x] :\ p''(1) = 0\}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}_3[x]$. *Wyznacz bazę tej podprzestrzeni i określ* $\dim U$.