

ALGEBRA - Kartkówka 3

Łącznie można otrzymać 30 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. (4,5 pkt) Czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe? Odpowiedź uzasadnij.

Dane są wektory $p = x^4 - x^2 + x$, $q = x^4 + 2x^3 + x^2 + 1$, $r = x^3 + x + 10$, $s = 1 \in \mathbb{R}_4[x]$.

- a) Układ $\{p, q, r, s\}$ jest układem liniowo zależnym.
- b) Układ $\{p, q, r, s\}$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}_4[x]$.
- c) $-x - 1 \in \text{lin}\{p, q, r, s\}$

Zadanie 2. (3+2 pkt) Podaj i uzasadnij odpowiedź na poniższe pytania.

- a) Czy $U = \{f \in \mathbb{R}_2[x] : f(1) = 0 \vee f'(2) = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}_2[x]$?
- b) Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ dane wzorem $\varphi(x) = (0, x + 1, \pi x, -x)$ jest liniowe?

Zadanie 3. (3 + 6,5 pkt) W przestrzeniach $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ rozważamy odpowiednio bazy $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{B} = (b_1 = (1, 1), b_2 = (2, 1)) \quad \mathcal{C} = (c_1 = (1, 2, 0), c_2 = (2, 3, 0), c_3 = (0, 0, 1))$$

Dane jest odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) Nie wyznaczając wzoru odwzorowania φ , a posługując się jedynie macierzą A' wyznacz obraz wektora $v = (5, 0)$ poprzez φ i podaj współrzędne $\varphi(5, 0)$ w bazie kanonicznej $\mathbb{R}^3$.
- b) Podaj wzór odwzorowania φ .

Zadanie 4. (2 + 9 pkt) Odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dane jest wzorem

$$\forall p \in \mathbb{R}_2[x] \quad \varphi(p)(x) = 2x \cdot p'(x) + x^2 \cdot p(0) + p(2).$$

- a) (2 pkt) Wyznacz macierz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, gdy $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.
 - b) (9 pkt) Wyznacz $\text{Ker}(\varphi)$, $\text{Im}(\varphi)$ oraz bazy i wymiary tychże podprzestrzeni. Czy φ jest monomorfizmem / epimorfizmem?
-