WFiIS, fizyka techniczna, I rok, grupa 1 23 stycznia 2025r.

ALGEBRA - Kartkówka 4

Proszę nie zapominać o niezbędnych komentarzach.
Łącznie można otrzymać 30 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. *(9 pkt) Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i określ wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.*

$$\varphi \in End(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x,y,z) = (2x+2y+z, 2x+5y+2z, x+2y+2z)$$

Zadanie 2. *(7 pkt) Endomorfizm $f \in End(\mathbb{R}^3)$ dany jest za pomocą przyporządkowania*

$$f(2,1,2) = (0,0,0), \quad f(-1,1,1) = (-12,12,12), \quad f(1,2,-2) = (-12,-24,24).$$

Wyznacz $f^{100}(1,2,1)$ i podaj wynik w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 3. *(4 pkt) Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, oblicz A^5 za pomocą A oraz I, jeśli $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.*

Zadanie 4. *(1+7+2=10 pkt) W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_2[x]$ rozważamy bazę $\mathcal{B}_k = (1, x, x^2)$ oraz iloczyn skalarny taki, że*

$$\forall p, q \in \mathbb{R}_2[x] \quad \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

a) Uzasadnij, że baza $\mathcal{B}_k$ nie jest ortogonalna.
b) Metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji bazy $\mathcal{B}_k$.
c) Oblicz długość wektora $r = x^2 + 5$.