

ALGEBRA - Zadanie domowe nr 4 - Przestrzenie wektorowe

Zad. 1 Czy to podprzestrzeń liniowa?

a) $\mathbb{R}^2 \supset U = \{(x, y) : x = 4y^2\}$ NIE $(4, 1) \in U \wedge (16, 2) \in U$
 ale $(4, 1) + (16, 2) = (20, 3) \notin U$ bo $20 \neq 4 \cdot 3^2$

b) $\mathbb{R}^3 \supset U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 = 0\}$ $x^2 + y^4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \wedge y^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$
 Zatem $U = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$
 Jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}^3$ $\forall (0, 0, x_1), (0, 0, x_2) \in U \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $\alpha(0, 0, x_1) + \beta(0, 0, x_2) = (0, 0, \alpha x_1 + \beta x_2) \in U$

c) $\mathbb{R}^2 \supset U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(1 - x^2 - y^2) \geq 0\}$
 $\ln(1 - x^2 - y^2) \geq 0 = \ln 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
 Zatem $U = \{(0, 0)\}$ i jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}^2$ (trywialna)

d) $\mathbb{R}^4 \supset U = \{(2x, x+y, 0, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$
 NIE jest to podprz. liniowa $x = y = 0 \quad (0, 0, 0, 1) \in U$
 $x = y = 1 \quad (2, 2, 0, 1) \in U$
 $(0, 0, 0, 1) + (2, 2, 0, 1) = (2, 2, 0, 2) \notin U$

e) $\mathbb{R}^3 \supset U = \{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 0 \text{ lub } 3x - 2y = 0\}$
 NIE jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}^3$
 $(2, 3, 5) \in U$ bo $3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$
 $(8, 8, 8) \in U$ bo $8 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 0$
 $(2, 3, 5) + (8, 8, 8) = (10, 11, 13) \notin U$ bo $3 \cdot 10 - 2 \cdot 11 \neq 0 \wedge 10 + 2 \cdot 11 - 3 \cdot 13 \neq 0$

f) $\mathbb{R}[x] \supset U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f = 11\}$ NIE jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}[x]$
 $f(x) = x^{11} + 10, g(x) = -x^{11} - x^2 \quad f \in U, g \in U$
 $f + g \notin U$ bo $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 10 - x^2, \deg(f+g) = 2 \neq 11$

Zad. 2 a) Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ układ $\{u, v, w\}$ jest liniowo niezależny?
 $u = (1, 0, 2, 1, 2), v = (2, 1, 1, 2, 1), w = (5, 1, 7, 5, p) \in \mathbb{R}^5$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 5 & p \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{H_2 - 2H_1 \\ H_3 - 5H_1}]{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & p-10 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3 - H_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-7 \end{pmatrix}$ dla $p \neq 7$ układ liniowo niezależny

b) $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 5y - z + 4t = x - 6y + z + 5t = 0\}$ Baza H ?

$\begin{cases} x - 5y - z + 4t = 0 \\ x - 6y + z + 5t = 0 \end{cases}$ Dodając stronami: $\rightarrow 2x - 11y + 8t = 0 \rightarrow x = \frac{11}{2}y - 4t = 11x + t$
 Odejmując stronami: $\rightarrow y - 2z - t = 0 \rightarrow y = 2z + t$

$H = \{(11x + t, 2x + t, x, t) : x, t \in \mathbb{R}\} = \{(11, 2, 1, 0)x + (1, 1, 0, 1)t; x, t \in \mathbb{R}\}$
 $= \text{lin} \{(11, 2, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$
 $\uparrow$ liniowo niezależne $\rightarrow$ baza $\{(11, 2, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$

c) $\{u_1, u_2\}$ uzupełnić do bazy $\mathbb{R}^4$

$u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (2, 4, 7, 0)$

Niech $u_3 = (a, b, c, d), u_4 = (x, y, z, t)$

$\dim \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ to baza $\mathbb{R}^4$ wtedy jest liniowo niezależny

$\Leftrightarrow 4 = \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \\ a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2 - 2H_1} \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$

Nybrac' wybrac'

$u_3 = (0, 1, 0, 0), u_4 = (0, 0, 0, 1)$

Zad. 2

- d) $U = \text{lin} \{ (1, 3, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 2, 1), (3, 4, 1, 3) \} \subset \mathbb{R}^4$
- $U \subset \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim U \leq 4$ $\nearrow$ 5 generatorów
Nie mogą być liniowo niezależne.
- Baza i symmiar U ?
 - Czy $v = (4, 10, 9, 4) \in U$?
- Jego współrzędne w bazie U ?

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - w_1 \\ w_5 - 3w_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \end{aligned}$$

Baza U : $B = (b_1, b_2, b_3)$ $b_1 = (1, 3, 2, 1)$, $b_2 = (0, 1, 0, 0)$, $b_3 = (0, 0, 1, 0)$
 $\dim U = 3$

Czy $v \in U$? $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_4 - 4w_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_4 + 2w_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v \in U$

bo $\{v, b_1, b_2, b_3\}$ liniowo zależny

$v = [\alpha, \beta, \gamma]_B$ $v = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = (4, 10, 9, 4)$
 $\alpha(1, 3, 2, 1) + \beta(0, 1, 0, 0) + \gamma(0, 0, 1, 0) = (\alpha, 3\alpha + \beta, 2\alpha + \gamma, \alpha) = (4, 10, 9, 4)$
 $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ 3\alpha + \beta = 10 \\ 2\alpha + \gamma = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 10 - 3\alpha = -2 \\ \gamma = 9 - 2\alpha = 1 \end{cases}$ $v = [4, -2, 1]_B$

Zad. 3

a) $U = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] : -3p(1) + 2p(0) = 0 \}$

Uzasadnij, że to podprz. liniowa $\mathbb{R}_2[x]$
 generatorzy, baza, symmiar

- Jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}_2[x]$

$\forall p, q \in U \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &-3(\alpha p + \beta q)(1) + 2(\alpha p + \beta q)(0) = \\ &= -3[\alpha p(1) + \beta q(1)] + 2[\alpha p(0) + \beta q(0)] = \\ &= \alpha \underbrace{[-3p(1) + 2p(0)]}_{=0 \text{ bo } p \in U} + \beta \underbrace{[-3q(1) + 2q(0)]}_{=0 \text{ bo } q \in U} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$\Downarrow$
 $\alpha p + \beta q \in U$

- $p \in \mathbb{R}_2[x]$ $p(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$
 $p \in U \Rightarrow 0 = -3p(1) + 2p(0) = -3[a + b + c] + 2c = -3a - 3b - c \Rightarrow c = -3(a + b)$
 $p \in U \Rightarrow p(x) = ax^2 + bx - 3a - 3b = a(x^2 - 3) + b(x - 3)$
 $\{x^2 - 3, x - 3\}$ generatorzy U $U = \text{lin} \{x^2 - 3, x - 3\}$
 ale i baza, bo są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim U = 2$

b) $\mathbb{R}_3[x] \supset W = \text{lin} \{ p, q, r, s \}$ $p(x) = x^2 + x - 1$, $q(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 2$
 $r(x) = x^3 + 3x - 5$, $s(x) = x^2 + 2x + 2$
 $\dim W = ?$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{w_4 - w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_2 - w_1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{w_4 - w_1 \\ w_3 - w_2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_4 - w_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim W = 3$$

c) $a \in \mathbb{R}$ Który $\{p, q, r\}$ jest bazą $\mathbb{R}_2[x]$?
 $p(x) = x^2 - 2x + 3$, $q(x) = 2x^2 - x + 1$, $r(x) = x^2 + ax + a$

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3 \Rightarrow \{p, q, r\}$ baza $\mathbb{R}_2[x]$ wtedy gdy $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = -3 + a - 4a + a - 6a + 2 = -1 - 8a \neq 0 \Leftrightarrow 8a \neq -1$$

$a \neq -\frac{1}{8}$

Zad. 4

$$p(x) = 1+x, \quad q(x) = 2-3x, \quad r(x) = 3-x+5x^2$$

str. 3

a) $B' = (p, q, r)$ to baza $\mathbb{R}_2[x]$
 $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, zatem B' to baza jeśli tylko układ $\{p, q, r\}$ jest liniowo niezależny

$$\text{or } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 3w_1}]{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} = 3 \quad \text{bo } \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

$$B_K = (1, x, x^2)$$

b) $P = P_{B_K \rightarrow B'}$ $p = [1, 1, 0]_{B_K}$ $q = [2, -3, 0]_{B_K}$ $r = [3, -1, 5]_{B_K}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

c) $N = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}x - 5x^2$ $N = [\alpha, \beta, \gamma]_{B'}$ = ?

$$N = \left[\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, -5 \right]_{B_K}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ -5 \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} PX = X \\ X' = P^{-1}X \end{matrix}$$

$$P^{-1} = ? \quad \text{CWiżenie!} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & -7 \\ 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{25}$$

$$X' = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 15 & 10 & -7 \\ 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zad. 5 Prawda / fałsza) Każda podprz. liniowa zawiera wektor zerowy. **PRAWDA**b) Dowolna baza $\mathbb{R}_5[x]$ jest 5-elementowa. **FALSZ** $\dim \mathbb{R}_5[x] = 6$ c) $\dim M_{3 \times 5}(\mathbb{R}) = 15$ **PRAWDA** $3 \cdot 5 = 15$ Zad. 6a) $\mathbb{Q}^3 = (\mathbb{Q}^3, +, \cdot)$ $u = (1, 1, 0)$, $v = (1+2i, 5, 0)$, $w = (3, 2, 0)$
Czy liniowo niezależne w $\mathbb{Q}^3$?

$$\text{NIE} \quad \text{metoda I: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+2i & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{metoda II} \quad \alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \alpha(1, 1, 0) + \beta(1+2i, 5, 0) + \gamma(3, 2, 0) = (\alpha + \beta + 3\gamma, \alpha + 5\beta + 2\gamma, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 5\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -5\beta - 2\gamma$$

$$\begin{aligned} -5\beta i - 2\gamma i + \beta i + 2\beta + 3\gamma &= -4\beta i + 2\beta + 3\gamma - 2\gamma i = 0 \\ 2\beta(1-2i) + (3-2i)\gamma &= 0 \\ \gamma &= -2\beta \frac{1-2i}{3-2i} \\ \alpha &= -5\beta + 4\beta \frac{1-2i}{3-2i} \end{aligned}$$

$$\text{np. } \beta = 3-2i, \quad \gamma = -2(1-2i), \quad \alpha = -5(3-2i) + 4(1-2i)$$

b) $C((0, \infty), \mathbb{R}) = \{f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ciągła}\}$

$$f_1 = e^x, \quad f_2 = \ln x,$$

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 \equiv 0$$

$$\forall x > 0 \quad c_1 e^x + c_2 \ln x = 0$$

$$\text{np. } x=1: c_1 \cdot e = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$x=2: c_2 e^2 + c_2 \ln 2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \frac{e^2}{\ln 2} \Rightarrow c_2 = 0$$