

Zadanie domowe nr 5 - Odwzorowania liniowe

Zadanie 1. Czy odwzorowanie f jest liniowe?

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (7x + y + 7, 7x - y)$
- b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z$
- c) $f : M_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $f(A) = \det(A)$
- d) $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $f(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}$

Zadanie 2. Dane jest odwzorowanie liniowe

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + 2y + z - t, x + 2z + t, 2x + y + 3t).$$

- a) Wyznacz obraz $\text{Im}\varphi$ oraz jądro $\text{Ker}\varphi$ odwzorowania φ , ich bazy i wymiary.
- b) Podaj własności φ (monomorfizm, epimorfizm).

Zadanie 3. Dane jest odwzorowanie liniowe

$$f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \quad f(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x).$$

- a) Wyznacz macierz f w bazach standardowych przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ oraz $\mathbb{R}_1[x]$.
- b) Wyznacz $\text{Ker}f$, $\text{Im}f$, określ ich bazy i wymiary.
- c) Podaj własności f (monomorfizm, epimorfizm).

Zadanie 4. Niech U, V to przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$, zaś $\varphi : U \rightarrow V$ odwzorowanie liniowe.

Macierz A odwzorowania φ w pewnych bazach ma postać $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Wyznacz $\dim \text{Ker}(\varphi)$.

Zadanie 5. Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane jest za pomocą następującego przyporządkowania.

$$f(1, 1, 1) = (2, 2), \quad f(1, 0, 1) = (1, 0), \quad f(0, 1, 1) = (1, 1)$$

- a) Podaj wzór odwzorowania f .
- b) Wyznacz macierz $A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ tego odwzorowania w bazach

$$\mathcal{B} = (b_1 = (3, 1, 1), b_2 = (5, 1, 6), b_3 = (4, -1, 2)), \quad \mathcal{C} = (c_1 = (-1, 1), c_2 = (1, 0)).$$

- c) Rozważmy w $\mathbb{R}^2$ bazę $\mathcal{C}' = (c'_1 = (1, 1), c'_2 = (2, 1))$. Wyznacz macierz przejścia od bazy $\mathcal{C}$ do bazy $\mathcal{C}'$.
- d) Wykorzystując macierz P wyznacz współrzędne wektora $v \in \mathbb{R}^2$ w bazie $\mathcal{C}'$, jeżeli $v = [2, 5]_{\mathcal{C}}$.

Zadanie 6. Macierz A odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazach kanonicznych przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ ma postać $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wyznacz macierz $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, gdy $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 1), b_2 = (2, 1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2, 0), c_2 = (2, 3, 0), c_3 = (0, 0, 1))$.

Zadanie 7. Wyznacz macierz $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ w bazie $\mathcal{B}'(b'_1 = 1, b'_2 = -5x)$, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ to macierz tego odwzorowania w bazie $\mathcal{B} = (b_1 = 1, b_2 = x)$.

Zadanie 8. Dane jest odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$. W przestrzeniach $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^3$ rozważamy odpowiednio bazy $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 1, 1, 1), b_2 = (1, 1, 1, 0), b_3 = (1, 1, 0, 0), b_4 = (1, 0, 0, 0))$ oraz $\mathcal{C} = (c_1 = (0, -1, 0), c_2 = (1, 0, 0), c_3 = (1, 1, 1))$.

a) Nie wyznaczając wzoru odwzorowania φ , a postępując się jedynie macierzą A' wyznacz obraz wektora $v = (5, 0, 1, 0)$ poprzez φ .

$$A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Podaj wzór odwzorowania φ .

Zadanie 9. Dane są odwzorowania liniowe f i g takie, że

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z), \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y) = (2x + y, x - y)$$

Ponadto odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane jest za pomocą przyporządkowania

$$\varphi(1, 1) = (2, 0), \quad \varphi(1, 3) = (6, 4).$$

a) Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania $h = g^2 \circ f$ oraz $h(1, 2, 0)$.

b) Uzasadnij, że g oraz φ są izomorfizmami.

c) Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania $g^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

Zadanie 10. Rozstrzygnij, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.

Niech $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ będzie odwzorowaniem liniowym.

a) Jeśli $\text{Ker} \varphi = \{0\}$, to φ jest izomorfizmem.

b) Jeśli $\text{Ker} \varphi = \{0\}$, to układ wektorów $\{\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)\}$ jest liniowo niezależny.

c) Macierz reprezentująca endomorfizm φ w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ jest macierzą kwadratową stopnia 3.