

Zadanie domowe nr 6 - Diagonalizacja endomorfizmu

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni (krotność geometryczną). Czy podany endomorfizm jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P .

a) $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x, y, z) = (x + 2y - 2z, x + 3z, x + 3y)$

b) $\varphi \in \text{End}(\mathbb{C}^3)$, $\varphi(z_1, z_2, z_3) = (iz_1 - z_1 + 2z_2 + z_3, 2iz_2 + 3z_3, iz_3 - z_3)$

Zadanie 2. Zbadaj diagonalizowalność endomorfizmu φ .

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad \varphi(p)(x) = 3xp''(x) + (x^2 - 1)p(1) + xp(2)$$

Zadanie 3. Dany jest $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ taki, że

$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0, 0), \quad \varphi(1, 1, 0) = (-1, -1, 0), \quad \varphi(1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Oblicz $\varphi^{100}(3, 6, 9)$.

Zadanie 4. a) Czy $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

Czy $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna?

b) Czy macierz $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

c) Liczba $\lambda = 0$ jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A . Czy A jest diagonalizowalna?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

d) Dla jakich wartości $p \in \mathbb{R}$ macierz $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & p & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest diagonalizowalna?

Zadanie 5. Rozstrzygnij, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.

Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ w bazach kanonicznych.

a) Można tak dobrać $p \in \mathbb{R}$, by φ miał dwuwymiarową podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda = 7$.

b) $\det(\frac{1}{\sqrt{7}}A^T) = \frac{196}{\sqrt{7}}$

c) Dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$ odwzorowanie φ jest izomorfizmem.

Zadanie 6. Dana jest macierz $A \in M_3(\mathbb{C})$, o której wiadomo, że $\text{tr}(A) = 2$ oraz $\lambda_1 = 7$ to jej wartość własna, której odpowiadają wektory własne $v = (1, 2, 1)$ oraz $w = (1, 1, 0)$. Oblicz $\det A$.

Zadanie 7. Korzystając z diagonalizowalności macierzy, wyznacz wzór ogólny ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} \end{cases}$$

Zadanie 8. Dane są macierze $A \in M_3(\mathbb{R})$ oraz $B \in M_2(\mathbb{C})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznacz $A^5 - A^4$, B^{-1} oraz B^{77} .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

Zadanie 9. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} p & 2 & -1 \\ 1 & p & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ macierz A jest diagonalizowalna?