

Zadanie domowe nr 7 Przestrzenie euklidesowe

Zadanie 1. Czy $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni liniowej $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$?

a) $V = \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 5x_2y_1 + 7x_2y_2$

b) $V = \mathbb{R}_1[x]$, $g(p, q) = p(1)q(1) + 2p(2)q(2)$

Zadanie 2. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Oblicz normy podanych wektorów.

a) $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ ze standardowym iloczynem skalarnym; $f = 2 \sin x - \cos x$

b) $V = M_2(\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^T)$; $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 3. Dana jest podprzestrzeń $W = \text{lin}\{w_1 = (3, 2, 0, 1, -4), w_2 = (1, 2, -2, 0, 1), w_3 = (3, -2, 6, -2, 5)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^5$. Wyznacz bazę przestrzeni $W^\perp$.

Zadanie 4. Uzasadnij, że $\mathcal{B} = (b_1 = 2, b_2 = x + x^2, b_3 = x + 2x^2, b_4 = 3x^3)$ jest bazą ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ z iloczynem skalarnym

$$\langle p, q \rangle = aa_1 + (b - c)(b_1 - c_1) + (2c - b)(2c_1 - b_1) + dd_1,$$

gdzie $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $q = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$.

Ponadto wyznacz współrzędne wektora $v = x^2 - x + 1$ w tejże bazie.

Zadanie 5. Dana jest podprzestrzeń liniowa U przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

$$U = \text{lin}\{b_1 = (1, 1, -1, 0), b_2 = (0, 2, -1, 1), b_3 = (1, 5, -3, 0)\}$$

a) Metodą Grama-Schmidta zortogonalizuj bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ przestrzeni U .

b) Wyznacz rzut ortogonalny $u = \pi_U(v)$ wektora $v = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ na podprzestrzeń U .

Zadanie 6. Układ wektorów $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 1)$ uzupełnij do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 7. Wyznacz macierz odpowiadającą izometrii liniowej $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, gdzie φ_1 jest obrotem (rotacją) o kąt 30° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, φ_2 jest odbiciem (symetrią ortogonalną) względem prostej tworzącej z dodatnią półosią Ox kąt 120° , zaś φ_3 jest obrotem o kąt 210° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Zadanie 8. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Jaką izometrię liniową reprezentuje?

Zadanie 9. W przestrzeni $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ funkcji ciągłych na przedziale $[0, 1]$ rozpatrujemy iloczyn skalarny $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.
Dana jest podprzestrzeń U , której bazę stanowi układ

$$\mathcal{B} = (b_1 = x, b_2 = 1).$$

- a) Sprawdź, czy baza $\mathcal{B}$ jest ortogonalna.
- b) Wyznacz rzut ortogonalny wektora $f = e^x$ na podprzestrzeń U .