Kartkówka 1 - MatS - Gr. 1

Zad. 1 $(\mathbb{R}\setminus\{2\}, \circ)$, $\forall_{x,y\in\mathbb{R}\setminus\{2\}}$ $x\circ y = (x-2)(y-2)+2$ Czy (pół)grupa/abelowa?

9p

- Działanie jest wewnętrzne, bowiem

$x,y\neq 2 \Rightarrow x\circ y\neq 2$, istotnie $x\circ y = \underset{\neq 0}{(x-2)}\underset{\neq 0}{(y-2)}+2\neq 2$ tj: $x\circ y\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

- przemienne $x\circ y = (x-2)(y-2)+2 = (y-2)(x-2)+2 = y\circ x$

- łączne $x,y,z\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$L = (x\circ y)\circ z = [(x-2)(y-2)+2]\circ z = [(x-2)(y-2)+2-2](z-2)+2 = (x-2)(y-2)(z-2)+2$

$P = x\circ(y\circ z) = x\circ[(y-2)(z-2)+2] = (x-2)[(y-2)(z-2)+2-2]+2 = (x-2)(y-2)(z-2)+2$

$L=P$

- el. neutralny? Czy $\exists e\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ t.że $\forall x\neq 2$ $x\circ e = e\circ x = x$ przemienne, wystarczy spr. że $x\circ e = x$

$x\circ e = x \Leftrightarrow (x-2)(e-2)+2 = x \Leftrightarrow xe-2x-2e+4+2 = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e(x-2) = 3x-6 \Leftrightarrow e(x-2) = 3(x-2)$ $/ : x-2$ bo z zał. $x-2\neq 0$

$e = 3\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ istnieje el. neutralny

warunek spełniony $\forall x\neq 2$

- Czy $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ $\exists x'\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ t.że $x\circ x' = x'\circ x = e$ przemienne więc wystarczy spr. $x\circ x' = e$

$x\circ x' = e \Leftrightarrow (x-2)(x'-2)+2 = 3$

$xx'-2x-2x'+4+2 = 3$

$x'(x-2) = 2x-3$ $/ : (x-2)$ bo z zał.

$x' = \frac{2x-3}{x-2}$ ~~istnieje~~

$x' = \frac{2x-4+1}{x-2} = 2+\underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\neq 0} \Rightarrow x'\neq 2 \Rightarrow x'\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ istnieje dla dowolnego $x\neq 2$ tj: $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

GRUPA ABELOWA

Zad. 2

5,5p

$$\bar{z}\cdot z^4 = (1+i)^{20}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)^{10}$$

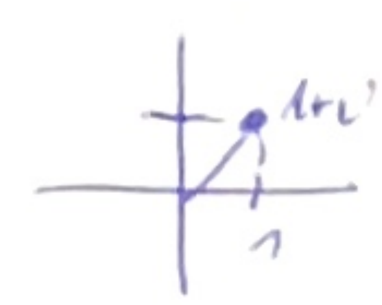
1) $z=0$ nie spełnia równania

2) zał. $z\neq 0$, $z = |z|e^{i\varphi}$

$|z| = |\bar{z}|$

$\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$

$(1+i)^{20} = \left[\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\right]^{20} = 2^{10}e^{5\pi i}$



$-\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$

$\left|-\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right| = 1 \Rightarrow \left(-\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)^{10} = \left(\cos\frac{5}{8}\pi+i\sin\frac{5}{8}\pi\right)^{10} = e^{\frac{50}{8}\pi i}$

wstawiając do równania

$|z|e^{-i\varphi}\cdot|z|^4e^{4i\varphi} = 2^{10}\underbrace{e^{5\pi i}}_{=e^{\pi i}}\cdot e^{\frac{25}{4}\pi i} \Leftrightarrow |z|^5e^{3i\varphi} = 2^{10}e^{\frac{29}{4}\pi i}$

2

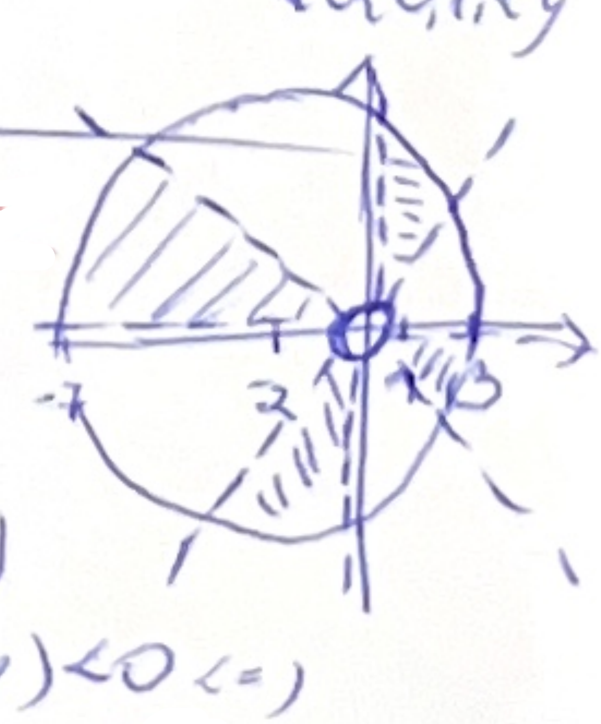
$\begin{cases}|z|^5 = 2^{10}\\ 3\varphi = \frac{29}{4}\pi+2k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|z| = 2^2 = 4\\ \varphi_k = \frac{29}{12}\pi+\frac{2}{3}k\pi\end{cases}$ $k\in\{0,1,2\}$

Odp. $z_0 = 4e^{\frac{29}{12}\pi i}$ $\vee$ $z_1 = 4\cdot e^{\frac{21}{12}\pi i}$ $\vee$ $z_{-2} = 4-e^{\frac{13}{12}\pi i}$

Zad. 3

5,5p

$$A = \left\{z\in\mathbb{C}: \frac{|z+2|}{|2-i|}\leq|1-2i|\cdot 10^{\arg(5)} \wedge Im(z^4)<0\right\}$$



$\arg(5) = 0$

$|2-i| = \sqrt{5}$

$|1-2i| = \sqrt{5}$

$\frac{|z+2|}{|2-i|}\leq|1-2i|\cdot 10^{\arg(5)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+2|\leq 5\cdot 10^0 = 5$

koło o środku $z_0 = -2$, promieniu $r=5$

$z=0$ nie spełnia $Im(z^4)<0$

zał. $z\neq 0$ $z = |z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$Im(z^4) = Im\left[|z|^4(\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi)\right]<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^4\sin 4\varphi<0 \Leftrightarrow \sin 4\varphi<0$

$\pi+2k\pi<4\varphi<2\pi+2k\pi$, $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$

Kartkówka 2 - Malf - gr. 2

Zad. 1

5p

$A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\times \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $(a,b)\circ(c,d) := (a+c+1,\ bd)$ Grupa / półgrupa abelowa?

• Działanie jest wewnętrzne $b\neq 0,\ d\neq 0 \Rightarrow (a,b)\circ(c,d) = (a+c+1, \underbrace{bd}_{\neq 0}) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b)\circ(c,d)\in A$

• przemienne $\forall a,c\in\mathbb{R},\ b,d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$(a,b)\circ(c,d) = (a+c+1, bd) = (c+a+1, db) = (c,d)\circ(a,b)$

• łączne $(a,b),(c,d),(x,y)\in A$

$L = [(a,b)\circ(c,d)]\circ(x,y) = (a+c+1, bd)\circ(x,y) = (a+c+1+x+1,\ bdy)$

$P = (a,b)\circ[(c,d)\circ(x,y)] = (a,b)\circ(c+x+1, dy) = (a+c+x+1+1, bdy)$ $L=P$

• Czy $\exists (e_1,e_2)\in A$ t. że $\forall (a,b)\in A$ $(a,b)\circ(e_1,e_2) = (e_1,e_2)\circ(a,b) = (a,b)$

$(a,b)\circ(e_1,e_2) = (a,b) \Leftrightarrow (a+e_1+1, be_2) = (a,b)$ przemienne, wystarczy sprawdzić $(a,b)\circ(e_1,e_2) = (a,b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+e_1+1 = a \\ be_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} e_1 = -1 \\ e_2 = 1\neq 0 \end{matrix} \Rightarrow (e_1,e_2) = (-1,1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ ($\Rightarrow$ $b\neq 0$)

istnieje el. neutralny

• Czy $\forall (a,b)\in A\ \exists (a',b')\in A$ t. że $(a,b)\circ(a',b') = (a',b')\circ(a,b) = (e_1,e_2)$

przemienne, wystarczy sprawdzić $(a,b)\circ(a',b') = (e_1,e_2)$

$(a,b)\circ(a',b') = (e_1,e_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+a'+1, bb') = (-1,1) \Rightarrow \begin{cases} a+a'+1 = -1 \\ bb' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a' = -2-a \\ b' = \frac{1}{b} \end{matrix}$ z zał. $b\neq 0$

dla dowolnego $(a,b)\in A$ istnieje el. symetryczny $(a',b') = (\underbrace{-2-a}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\tfrac{1}{b}}_{\in\mathbb{R}\setminus\{0\}})\in A$ (bo wtedy $b\neq 0$)

GRUPA ABELOWA

Zad. 2

6p

$-i\bar{z}^3 = (\bar{z})^2\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^4$

1) $z=0$ spełnia równanie

2) Zał. $z\neq 0$ $z = |z|e^{i\varphi}$, wówczas $|\bar z| = |z|$ oraz $\bar z = |z|e^{-i\varphi}$

$\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ $\wedge$ $|\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}| = 1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6} = e^{\frac{\pi}{3}i}$

Wstawiając do równania $-i = 1\cdot e^{\frac{3}{2}\pi i}$

$1\cdot e^{\frac{3}{2}\pi i}\ |z|^3 e^{3i\varphi} = |z|^2 e^{-2i\varphi}\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^4$ $/ : |z|^2$ $/ \cdot e^{2i\varphi}$ bo $|z|\neq 0$ gdyż $z\neq 0$

$e^{\frac{3}{2}\pi i}\ |z| e^{5i\varphi} = e^{\frac{4}{3}\pi i}$ $/\cdot e^{-\frac{3}{2}\pi i}$ $\frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{8-9}{6} = -\frac{1}{6}$

$|z| e^{5i\varphi} = e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$\Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ 5\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ $|z| = 1$ $\varphi_k = -\frac{1}{30}\pi + \frac{2}{5}k\pi$

Odp. $z_k = 1\cdot e^{\varphi_k i}$ $k = \{0,1,2,3,4\}$ $\vee$ $z = 0$

5p

Zad. 3

$A = \{z\in\mathbb{C}: \arg(2\bar z + i) = \pi\ \wedge$

$\wedge\ \mathrm{Re}[(1+i)\bar z - 2i + 1] \geq 0\}$

• $\pi = \arg(2\bar z + i) = \arg\left[2\left(\bar z + \frac{i}{2}\right)\right] = \underbrace{\arg 2}_{0} + \arg\left(\bar z + \frac{i}{2}\right) + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ $\arg\left(\bar z + \frac{i}{2}\right) = \pi - 2k\pi$

$2\pi - \arg\left(\overline{z + \frac{i}{2}}\right) = 2\pi - \arg\left(z - \frac{i}{2}\right)$ $\Big) \Rightarrow \arg\left(z - \frac{i}{2}\right) = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$

$z \neq \frac{i}{2}$

• $z = x+iy$

$\mathrm{Re}[(1+i)\bar z - 2i + 1] = \mathrm{Re}[(1+i)(x-iy) - 2i + 1] = \mathrm{Re}[x - iy + ix + y - 2i + 1] = x+y+1 \geq 0$ $y \geq -1-x$