

ALGEBRA - Kartkówka 2

Łącznie można otrzymać 20 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. (6 pkt) Dany jest układ równań

$$\begin{cases} (p-2)x_1 + 2x_2 + (p-1)x_3 + x_4 = 2 \\ (p-1)x_2 + 5x_4 = 6-p \\ (3p-6)x_1 + 6x_2 + (4p-4)x_3 + 5x_4 = 8 \\ (p-2)x_1 + 2x_2 + (4p-3)x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases}.$$

Określ typ układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

W przypadku układu nieoznaczonego podaj liczbę parametrów.

Zadanie 2. (6 pkt) Dane są proste

$$k: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = z, \quad l: \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}.$$

a) Zbadaj wzajemne położenie prostych k i l .

b) Oblicz odległość między tymi prostymi.

Zadanie 3. (6 pkt) Dane są macierze nieosobliwe $A, B, C \in M_4(\mathbb{R})$, o których wiadomo, że

$$A^T A = I,$$

$$B = -A^T,$$

$$\det(ABA) < 0,$$

zaś C powstaje z macierzy B poprzez wykonanie następujących operacji:

- zamianę miejscami wiersza pierwszego z wierszem drugim,
- odjęcie od pierwszej kolumny drugiej kolumny,
- pomnożenie trzeciej kolumny przez 3.

Oblicz wyznacznik macierzy $D := (2AB^{-1}C)^{-1}$. Przedstaw niezbędne rachunki.

Zadanie 4. (2 pkt) Czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe? Odpowiedź uzasadnij.

Dane są punkt $P = (1, 2, -2)$, wektor $\vec{w} = [4, 4, 1]$ oraz płaszczyzna $\pi: \begin{cases} x = t + 2s \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$

a) Punkt P leży na płaszczyźnie π .

b) Nie istnieje rzut ukośny punktu P w kierunku wektora $\vec{w}$ na płaszczyznę π .

ALGEBRA - Kartkówka 2

Łącznie można otrzymać 20 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. (6 pkt) Dany jest układ równań

$$\begin{cases} px_1 & & + & 2px_3 & + & (p+1)x_4 & = & p+3 \\ & (p-1)x_2 & & x_3 & + & (p+3)x_4 & = & p+4 \\ & (2p-2)x_2 & + & 4x_3 & + & (2p+6)x_4 & = & 2p+10 \\ 3px_1 & + & (1-p)x_2 & + & (6p+1)x_3 & + & (3p+3)x_4 & = & 3p+10 \end{cases}.$$

Określ typ układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

W przypadku układu nieoznaczonego podaj liczbę parametrów.

Zadanie 2. (6 pkt) Wyznacz punkt P' symetryczny do punktu P względem płaszczyzny $\pi : x + y + z + 2 = 0$, jeśli P to punkt przecięcia prostych k i l , gdzie

$$k : \frac{x-2}{2} = -y-3 = \frac{z-1}{3}, \quad l : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 3. (6 pkt) Dane są macierze nieosobliwe $A, B, C, D, E \in M_4(\mathbb{R})$, o których wiadomo, że

$$\det(A^{-1}BAB) = 4,$$

$$\det(B^T) < 0,$$

$$\det(ED) = \frac{1}{12},$$

zaś C powstaje z macierzy B poprzez wykonanie następujących operacji:

- zamianę miejscami wiersza pierwszego z wierszem trzecim,
- dodanie do pierwszej kolumny dwukrotnie kolumny drugiej,
- pomnożenie drugiego wiersza przez 3.

Oblicz wyznacznik macierzy $M := 3BCD^T E^T$. Przedstaw niezbędne rachunki.

Zadanie 4. (2 pkt) Czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe? Odpowiedź uzasadnij.

a) Kąt pomiędzy wektorami $\vec{a} = [1, 4, 0]$, $\vec{b} = [2, -1, 50]$ jest ostry.

b) Dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$ macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & p & 2 & p \\ 0 & 0 & 2 & -p \\ 0 & 0 & p & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ jest odwracalna.
