

ALGEBRA - Kartkówka 3

Łącznie można otrzymać 30 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. ($4+5+7=16$ pkt) Odwzorowanie liniowe $g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dane jest wzorem

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a - b + 3d) + (4b - 5c + d)x + (-a + 3c - 2d)x^2.$$

a) Podaj macierz A odwzorowania g w bazach standardowych przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$ oraz $\mathbb{R}_2[x]$.

b) W przestrzeniach $M_2(\mathbb{R})$ oraz $\mathbb{R}_2[x]$ rozważamy odpowiednio bazy

$$\mathcal{B}' = \left(B'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B'_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$\mathcal{C}' = (c'_1 = 2, c'_2 = 2 + 2x, c'_3 = 3x^2).$$

Podaj macierz $A' = M_g(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ odwzorowania g w bazach $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{C}'$.

c) Za pomocą macierzy A' (nie korzystając ze wzoru odwzorowania g , ani z macierzy A) wyznacz $g\left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$. Wynik podaj w postaci wielomianu.

Zadanie 2. ($3+3+4+2+2=14$ pkt) Dane jest odwzorowanie

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 5a \\ c & 3c \end{bmatrix}.$$

a) Uzasadnij, że φ jest odwzorowaniem liniowym.

b) Uzasadnij, że układ $\mathcal{B}$ stanowi bazę przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{B} = \left(B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

c) Wyznacz jądro i obraz odwzorowania φ , podaj ich bazy i wymiary.

d) Czy φ jest monomorfizmem / epimorfizmem? Odpowiedź uzasadnij.

e) Znaną w podpunkcie c) bazę przestrzeni $\text{Im } \varphi$ uzupełnij do bazy przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$.

ALGEBRA - Kartkówka 3

Łącznie można otrzymać 30 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. ($2+4+2,5+5,5=14$ pkt) Dane są zbiór $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$ oraz odwzorowanie

$$\varphi : S \rightarrow S, \quad \varphi(A) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A + A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

- a) Uzasadnij, że S jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$.
- b) Uzasadnij, że φ jest odwzorowaniem liniowym.
- c) Podaj bazę przestrzeni S i określ wymiar przestrzeni S .
- d) Wyznacz macierz $D = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ odwzorowania φ ,
gdzie $\mathcal{B}$ to baza przestrzeni S , którą wskazano w podpunkcie c).

Zadanie 2. ($7+1+2+6=16$ pkt) Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ dane jest za pomocą przyporządkowania

$$f(2+x) = x^2 + x^3, \quad f(2-x) = -x^2 + 3x^3, \quad f(x^2 - 2x) = x - x^2, \quad f(x^2 + x^3) = 1 - x^2.$$

- a) Podaj wzór $f(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.
- b) Zapisz macierz $A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ odwzorowania f w bazie $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$.
- c) Uzasadnij, że f jest izomorfizmem.
- d) Dane jest bijektywne odwzorowanie liniowe $g : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ takie, że macierz $B = M_g(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, gdzie $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ jest postaci

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór $g^{-1} \circ f^{-1}$.
