

ALGEBRA - Kartkówka 4

Proszę nie zapominać o stosownych komentarzach i przedstawić niezbędne rachunki.
Łącznie można otrzymać 30 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. (13 pkt) Dany jest endomorfizm

$$\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (7x + 4y + 16z, 2x + 5y + 8z, -2x - 2y - 5z).$$

a) Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i określ wymiar tychże podprzestrzeni.

b) Czy φ jest diagonalizowalny? Odpowiedź uzasadnij.

c) Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P .

d) Wyznacz $\varphi^{654}(0, -3, 1)$ i podaj wynik w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 2. (7 pkt) Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ macierz A jest diagonalizowalna?

Zadanie 3. (10 pkt) W przestrzeni $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ funkcji ciągłych na odcinku $[-1, 1]$ rozpatrujemy iloczyn skalarny $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

Dana jest podprzestrzeń U , której bazę stanowi układ $\mathcal{B} = (f_1 = 1, f_2 = x + 2, f_3 = \sin x)$. Uzasadnij, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, a następnie metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji bazy podprzestrzeni U .

ALGEBRA - Kartkówka 4

Proszę nie zapominać o stosownych komentarzach i przedstawić niezbędne rachunki.
Łącznie można otrzymać 30 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. (13 pkt) Dany jest endomorfizm

$$\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (2x + 2y - z, x + 3y - z, -x - 2y + 2z).$$

a) Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i określ wymiar tychże podprzestrzeni.

b) Czy φ jest diagonalizowalny? Odpowiedź uzasadnij.

c) Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P .

d) Wyznacz $\varphi^{987}(0, -1, 2)$ i podaj wynik w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 2. (7 pkt) Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & p & -3 \\ 0 & -3 & p \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ macierz A jest diagonalizowalna?

Zadanie 3. (10 pkt) W przestrzeni $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ funkcji ciągłych na przedziale $[0, 1]$ rozpatrujemy iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Dana jest podprzestrzeń liniowa $U = \text{lin}\{1, x, x^2\}$. Czy podana baza przestrzeni U jest ortogonalna? Odpowiedź uzasadnij.

Jeśli nie, metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji tejże bazy.
