Dowód indukcyjny
Dowód indukcyjny jest to dowód w którym wykorzystujemy **zasadę indukcji matematycznej**.

Twierdzenie 1.2.4 (Zasada indukcji matematycznej)**.** Niech $\Phi(n)$ będzie zdaniem logicznym dla $n \in \mathbb{N}_0$ oraz niech $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Jeśli zachodzą warunki

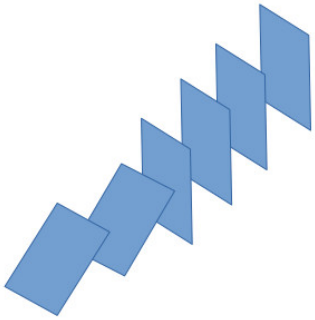
i) $\Phi(n_0)$, ($\Phi(n_0)$ jest prawdziwe)

ii) $\forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq n_0 \quad \Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)$, (prawdziwa jest implikacja)

to wówczas $\forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq n_0 \quad \Phi(n)$. ($\forall n \in \mathbb{N}_0$ zdanie $\Phi(n)$ jest prawdziwe)

Jeśli jakieś twierdzenie, w którym mowa o liczbach naturalnych,
jest prawdziwe dla określonej liczby naturalnej n_0 oraz
jeżeli dla każdej liczby naturalnej n z założenia, że twierdzenie jest prawdziwe dla n wynika, że jest ono prawdziwe dla liczby następnej $n+1$,
to twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej nie mniejszej niż n_0.

Kostki domina
Czy wszystkie kostki się przewrócą?
Jeśli przewrócono pierwszą kostkę oraz
kostki są ustawione tak,
że upadek którejkolwiek z nich przewraca następną,
to wszystkie kostki się przewrócą.



Przykład 1.2.5. Sprawdźmy poniższe równości.

$1^3 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot 2^2$
$1^3 + 2^3 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot 3^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = \frac{1}{4} \cdot 3^2 \cdot 4^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 \cdot 5^2$

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

I. Warunek początkowy
Sprawdziliśmy już, że dla $n_0 = 1$ wzór jest prawdziwy.

II. Krok indukcyjny (prawo przekazywania)
Niech n oznacza liczbę naturalną. Chcemy uzasadnić, że jeśli wzór jest prawdziwy dla n, to jest on prawdziwy dla $n+1$. Innymi słowy chcemy uzasadnić, że z założenia (tzw. założenie indukcyjne)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

wynika teza

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = 1^3 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2.$$

Dowód przedstawiamy poniżej.

$$L = \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = (n+1)^3 + \sum_{i=1}^{n} i^3 \overset{z.ind.}{=} (n+1)^3 + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 =$$

$$= (n+1)^2\left(n+1+\frac{1}{4}n^2\right) = \frac{1}{4}(n+1)^2(4n+4+n^2) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = P$$

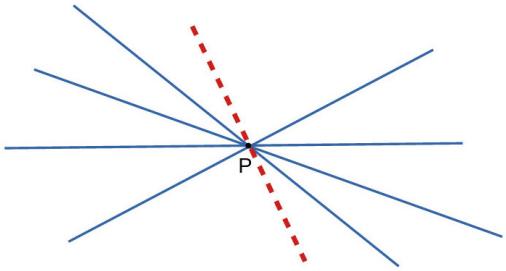
Zatem $L = P$, implikacja jest prawdziwa.

III. Wniosek
Na mocy zasady indukcji matematycznej wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej, tj. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Przykład 1.2.6. Udowodnimy, że n różnych prostych na płaszczyźnie, przechodzących przez ustalony punkt P, dzieli płaszczyznę na $2n$ części.

I. Warunek początkowy, dla $n_0 = 1$
Jedna prosta dzieli płaszczyznę na $2n_0 = 2$ części.

II. Krok indukcyjny
Niech $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że n prostych przechodzących przez ustalony punkt P, dzieli płaszczyznę na $2n$ części. Chcemy uzasadnić, że wówczas $n+1$ prostych dzieli płaszczyznę na $2(n+1) = 2n+2$ części.



Poprowadźmy dodatkową prostą. W miejsce dwóch obszarów powstają cztery. A zatem mamy $2n+2$ obszary.

III. Wniosek: Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej liczby prostych.