

Kartkówka 4

Łącznie można otrzymać 25 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. (8 pkt) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f . Określ, czy są to minima czy maksima lokalne.

$$f(x, y) = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Zadanie 2. (3 pkt) Oblicz lub uzasadnij, że nie istnieje granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(y-2)^2 \cdot \ln x}{(x-1)^2 + (y-2)^2}$.

Zadanie 3. (5 pkt) Napisz równanie parametryczne płaszczyzny π zawierającej styczną l do krzywej Γ w punkcie $A = (3, 0, 1)$ i prostopadłej do płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ w punkcie $B = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}, 1)$.

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2 + t^2 \\ y(t) = \ln(t^3 + 2) \\ z(t) = t^2 \cdot e^{3t+3} \end{cases}, t > \sqrt[3]{-2} \quad \Sigma : z = \sin(x^2 + y^2)$$

Zadanie 4. (6 pkt) Metodą mnożników Lagrange'a wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x, y) = x^2 - 4x + 11 + (y - 2)^2$ w zbiorze $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

Zadanie 5. (3 pkt) Korzystając z definicji, oblicz (jeśli istnieją) pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f w punkcie $P_0 = (0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^4 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$
