

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

### 3.1 Macierze i ich własności

Niech  $K = \mathbb{R}$  lub  $K = \mathbb{C}$ .

**Definicja 3.1.1.** Funkcję  $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K$ ,  $A(i, j) = a_{ij}$  nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy  $K = \mathbb{R}$ , zespoloną gdy  $K = \mathbb{C}$ ) o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach.

Wartości  $a_{ij}$  nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie  $A$  oznaczamy symbolem  $[a_{ij}]_{m \times n}$ .

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ciąg  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  nazywamy  *$i$ -tym wierszem* macierzy  $A$ , zaś ciąg  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$  nazywamy  *$j$ -tą kolumną* macierzy  $A$ .

Oznaczmy symbolem  $M_{m \times n}(K)$  zbiór wszystkich macierzy o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach i elementach z  $K$ . Gdy  $m = n$ , piszemy krócej  $M_n(K)$ . Macierz  $A \in M_n(K)$  nazywamy *macierzą kwadratową stopnia  $n$* .

Dla  $A, B \in M_{m \times n}(K)$ ,  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  mamy  
 $A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} a_{ij} = b_{ij}$ .

**Przykład 3.1.2.**  $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

$$B \in M_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0}_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{macierz zerowa wymiaru } m \times n$$

## Typy macierzy

**Definicja 3.1.3.** Macierz kwadratową  $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$  nazywamy macierzą:

- diagonalną lub przekątniową, gdy  $a_{ij} = 0$  dla  $i \neq j$
- trójkątną górną, gdy  $a_{ij} = 0$  dla  $i > j$
- trójkątną dolną, gdy  $a_{ij} = 0$  dla  $i < j$

Oznaczmy:

$D_n(K)$  zbiór macierzy diagonalnych stopnia  $n$

$T_n^G(K)$  zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia  $n$

$T_n^D(K)$  zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia  $n$

$$T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$$

**Przykład 3.1.4.**  $I_n$  - macierz jednostkowa stopnia  $n$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^D(K) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^G(K)$$

## Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy: Niech  $A, B \in M_{m \times n}(K)$ ,  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ .  
 $C = A + B$ ,  $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech  $\alpha \in K$ ,  $A \in M_{m \times n}(K)$ ,  $A = [a_{ij}]$ .  
 $C = \alpha \cdot A$ ,  $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$ ,  $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$   
Oznaczamy  $-A = (-1) \cdot A$  oraz  $A - B = A + (-B)$ .
- Mnożenie macierzy: Niech  $A \in M_{m \times p}(K)$ ,  $A = [a_{ik}]$ ,  $B \in M_{p \times n}(K)$ ,  $B = [b_{kj}]$ .  
 $C = A \cdot B$ ,  $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$ ,  $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$   
Dla  $r \in \mathbb{N}$  oznaczamy  $A^r = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{r\text{-razy}}$
- Transponowanie: Niech  $A \in M_{m \times n}(K)$ ,  $A = [a_{ij}]$   
 $C = A^T$ ,  $C = [c_{ij}] \in M_{n \times m}(K)$ ,  $c_{ij} = a_{ji}$

**Przykład 3.1.5.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz  $C - 2D$ ,  $\frac{1}{2} \cdot A^T$ ,  $AB$ ,  $BA$ ,  $D^2$ .

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = AB \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{schemat Falka} \quad \begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 1 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 20 \end{array} \quad \mathbf{1} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$$

$$G = BA \in M_3(\mathbb{R}) \quad \begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 4 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 10 & 14 & 18 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array} \quad AB \neq BA$$

$D^2 = D \cdot D \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $CA \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ , zaś  $AC$  jest niewykonalne

$$CD \in M_2(\mathbb{R}), \quad DC \in M_2(\mathbb{R}), \quad CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}, \quad DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}, \quad CD \neq DC$$

**Własności działań na macierzach**

**Twierdzenie 3.1.6.** Niech  $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m \times n}(K)$ ,  $\alpha, \beta \in K$ . Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i)  $A + B = B + A$
- ii)  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- iii)  $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$
- iv)  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- v)  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- vi)  $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

**Wniosek 3.1.7.**  $(M_{m \times n}(K), +)$  jest grupą abelową.

**Twierdzenie 3.1.8.** Niech  $A, B, C$  będą macierzami o elementach z  $K$  oraz niech  $\alpha \in K$ . Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i)  $(AB)C = A(BC)$
- ii)  $(A + B)C = AC + BC$
- iii)  $A(B + C) = AB + AC$
- iv)  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- v)  $AI = A$
- vi)  $IA = A$

**Wniosek 3.1.9.**  $(M_n(K), \cdot)$  jest półgrupą nieprzemianną z jedyneką.

**Twierdzenie 3.1.10.** Niech  $A, B$  będą macierzami o elementach z  $K$  oraz niech  $\alpha \in K$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i)  $(A^T)^T = A$
- ii)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- iii)  $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$
- iv)  $(AB)^T = B^T A^T$
- v)  $(A^r)^T = (A^T)^r$

**Definicja 3.1.11.** Niech  $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ . Sumę elementów na przekątnej  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$  nazywamy *śladem macierzy*  $A$  i oznaczamy symbolem  $\text{tr}(A)$ .

**Przykład 3.1.12.**  $\text{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

### Własności śladu macierzy

**Twierdzenie 3.1.13.** Niech  $A, B \in M_n(K)$ ,  $\alpha \in K$ . Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i)  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$     ii)  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- iii)  $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$     iv)  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

*Dowód.* i), ii), iii) Wynika z definicji.

iv) Niech  $C = AB = [c_{ij}]$ ,  $D = BA = [d_{ij}]$ . Wówczas  $c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$  oraz  $\text{tr}C = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$ . Ponadto  $d_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}$  oraz  $\text{tr}D = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}$ . Zatem  $\text{tr}C = \text{tr}D$ .  $\square$

**Wniosek 3.1.14.** Jeśli  $A, B \in M_{m \times n}(K)$ , to wówczas  $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}(BA^T)$ .

*Dowód.* Na mocy twierdzenia 3.1.13 i) mamy  $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr} B^T A$  oraz  $\text{tr}(AB^T) = \text{tr}((AB^T)^T) = \text{tr}(BA^T)$ . Ponadto  $\text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ki} b_{ki}$  oraz  $\text{tr}(AB^T) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ik}$ , skąd wynika teza.  $\square$

**Definicja 3.1.15.** Macierz kwadratową  $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$  nazywamy macierzą:

- a) *symetryczną*, gdy  $A = A^T$
- b) *antysymetryczną*, gdy  $A = -A^T$

**Twierdzenie 3.1.16.** Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antisymetrycznej.

*Dowód.*  $A = B + C$ , gdzie  $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ,  $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ ,  $B = B^T$ ,  $C = -C^T$ . Ponadto  $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left[(A + A^T)^T\right] = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$ . Analogicznie sprawdzamy, że  $C^T = -C$ .  $\square$

**Przykład 3.1.17.**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$  macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$  macierz antisymetryczna

**Definicja 3.1.18.** Macierz utworzoną z macierzy  $B_{ij}$ , dla  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  postaci

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{array} \right]$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze  $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{in}$  stojące w  $i$ -tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze  $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{mj}$  stojące w  $j$ -tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

## 3.2 Wyznacznik macierzy

### Definicja indukcyjna wyznacznika

**Definicja 3.2.1.** Wyznacznikiem macierzy kwadratowej  $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$  nazywamy liczbę  $\det A \in K$  określoną następująco:

- gdy  $n = 1$ , to  $\det A = a_{11}$
- gdy  $n \geq 2$ , to  $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$ ,

gdzie  $A_{1j}$  oznacza macierz stopnia  $n-1$  otrzymaną z macierzy  $A$  przez skreślenie pierwszego wiersza i  $j$ -tej kolumny.

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Przykład 3.2.2.**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 18$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det B_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

Metoda Sarrusa

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix} - \left[ 3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2 \right] = -59$$

**Definicja 3.2.3.** Niech  $A = [a_{ij}]$  będzie macierzą kwadratową stopnia  $n$  o elementach z  $K$ .

- Minorem elementu  $a_{ij}$*  nazywamy wyznacznik macierzy  $A_{ij}$  stopnia  $n-1$  otrzymanej poprzez skreślenie  $i$ -tego wiersza oraz  $j$ -tej kolumny macierzy  $A$ . Oznaczamy go symbolem  $M_{ij}$ .
- Dopełnieniem algebraicznym elementu  $a_{ij}$*  nazywamy liczbę  $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$ .

**Przykład 3.2.4.**  $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$

$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$ ,  $M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$

$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{23} = 17$

**Twierdzenie 3.2.5** (Laplace'a). Niech  $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ , gdzie  $n \geq 2$ . Wówczas:

i)  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$   $\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}$ ,  
(rozwińcie względem  $i$ -tego wiersza)

ii)  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$   $\det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} D_{kj}$ .  
(rozwińcie względem  $j$ -tej kolumny)

**Przykład 3.2.6.**  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  Rozwijamy względem drugiego wiersza.

$\det C = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$  Rozwijamy względem czwartej kolumny,

a potem względem ostatniego wiersza.

$\det C = 4 \cdot (-1)^9 M_{54} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$

$-12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$

**Wniosek 3.2.7.** Niech  $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$  lub  $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$ . Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

**Przykład 3.2.8.**  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$

$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$

## Własności wyznaczników

Niech  $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ . Oznaczmy przez  $A_k$   $k$ -tą kolumnę macierzy  $A$ , czyli  $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$ .

**Twierdzenie 3.2.9.** Niech  $A \in M_n(K)$ . Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

- i)  $\det A = \det(A^T)$
- ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas  $\det A = 0$ .
- iii) Jeśli macierz  $B$  powstaje z macierzy  $A$  poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę  $\lambda \neq 0$ , to wówczas  $\det B = \lambda \cdot \det A$ .
- iv) Jeśli  $A_k = B_k + C_k$ , to wówczas  $\det A = \det[A_1, \dots, B_k, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, C_k, \dots, A_n]$
- v) Jeśli macierz  $B$  powstaje z macierzy  $A$  poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas  $\det B = -\det A$ .
- vi) Jeśli istnieją  $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$  takie, że  $k \neq l$  oraz  $A_k = \lambda A_l$ , dla pewnego  $\lambda \in K$ , to wówczas  $\det A = 0$ .
- vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn.  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K : A_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \cdot A_j$ , to wówczas  $\det A = 0$ .
- viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy  $A$ , to wyznacznik nie zmieni się.
- ix) Jeśli  $B \in M_n(K)$ , to wówczas  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- x) Jeśli macierz  $A$  jest macierzą blokową postaci

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline ? & ? & \dots & B_n \end{array} \right],$$

gdzie  $B_1, B_2, \dots, B_n$  są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni),  $\mathbf{0}$  macierzami zerowymi, a  $?$  dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas  $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \dots \cdot \det B_n$ .

**Wniosek 3.2.10.** i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

- ii)  $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$  dla dowolnego  $0 \neq \lambda \in K$
- iii)  $\det(A^r) = (\det A)^r$  dla dowolnego  $r \in \mathbb{N}$ .

## Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

Operacje elementarne:  $w_i \leftrightarrow w_j$  zamiana wierszy miejscami  
 $\lambda \cdot w_i, \lambda \in K, \lambda \neq 0$  pomnożenie wiersza przez liczbę  
 $w_i + \lambda \cdot w_j, \lambda \in K$  dodanie do  $w_i$  wielokrotności  $w_j$

**Przykład 3.2.11.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A \stackrel{w_1 \leftrightarrow w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_4 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{w_3 - w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{-\frac{1}{3} \cdot w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{w_4 + 5w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{22}{3} = -22$$

## 3.3 Macierz odwrotna

**Definicja 3.3.1.** Macierz  $B \in M_n(K)$  nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy  $A \in M_n(K)$ , jeżeli  $AB = BA = I_n$ . Oznaczamy ją wówczas symbolem  $A^{-1}$ .

**Przykład 3.3.2.**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$$

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c = 0 \wedge c = 1 \text{ sprzeczność}$$

Zatem nie istnieje  $A^{-1}$ .

**Definicja 3.3.3.** i) Macierz  $A \in M_n(K)$ , dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy *macierzą odwracalną*.

ii) Macierz  $A \in M_n(K)$  taką, że  $\det A = 0$  nazywamy *macierzą osobliwą*. W przeciwnym wypadku nazywamy ją *macierzą nieosobliwą*.

**Twierdzenie 3.3.4.** a) Macierz  $A \in M_n(K)$  jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

b) Niech  $A \in M_n(K)$  będzie macierzą nieosobliwą, zaś  $D = [D_{ij}]$  macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$ .

**Definicja 3.3.5.** Niech  $A \in M_n(K)$  będzie macierzą nieosobliwą, zaś  $D = [D_{ij}]$  macierzą jej dopełnień algebraicznych. Macierz  $D^T$  nazywamy *macierzą dołączoną* do macierzy  $A$  i oznaczamy symbolem  $A^D$ .

**Wniosek 3.3.6.** Zbiór macierzy kwadratowych nieosobliwych stopnia  $n$  o elementach z ciała  $K$  wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę nieprzemianą. Grupę tę oznaczamy symbolem  $GL_n(K)$  i nazywamy *ogólną grupą liniową*.

## Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

### 1. Za pomocą definicji

**Przykład 3.3.7.**  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$

$\det A = 11 \neq 0$ , zatem  $A$  jest odwracalna.

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a - b & 5a + 2b \\ 3c - d & 5c + 2d \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 1 \\ 5a + 2b = 0 \\ 3c - d = 0 \\ 5c + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

### 2. Metoda dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa)

**Przykład 3.3.8.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D = ?$$

$\det A = -3 \neq 0$ , zatem  $A$  jest odwracalna. Niech  $M = [M_{ij}]$  oznacza macierz minorów elementów  $a_{ij}$ . Wówczas

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = [D_{ij}] = [(-1)^{j+i} M_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

### 3. Metoda operacji elementarnych (metoda bezwyznaczykowa)

Niech  $A \in M_n(K)$  będzie macierzą nieosobliwą.

$$[A|I] \xrightarrow[\text{tylko na wierszach!}]{\text{operacje elementarne}} [I|A^{-1}]$$

Algorytm Gaussa: macierz nieosobliwa  $\longrightarrow$  macierz trójkątna górna  $\longrightarrow I$

Metoda eliminacji Gaussa to praktyczny sposób używania metody operacji elementarnych.

#### Przykład 3.3.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$[A|I] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3-w_1} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{w}_2 \text{ na koniec}]{-\frac{1}{2}w_3}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\frac{1}{2}w_4]{\begin{array}{l} w_4+w_3 \\ -\frac{1}{2}w_3 \end{array}}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1-w_4} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_2+w_3}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1-2w_2} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\text{Zatem } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

#### Własności macierzy odwrotnej

**Twierdzenie 3.3.10.** Niech  $A, B \in M_n(K)$ ,  $\alpha \in K$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Jeśli macierze  $A$  i  $B$  są odwracalne, to wówczas macierze  $A^{-1}$ ,  $A^T$ ,  $AB$ ,  $\alpha A$ ,  $A^r$  również są odwracalne i prawdziwe są następujące równości.

- i)  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- ii)  $(A^{-1})^{-1} = A$
- iii)  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- iv)  $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$
- v)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- vi)  $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r$

**Twierdzenie 3.3.11.** Jeśli macierz kwadratowa  $A$  jest macierzą blokowo-diagonalną

postaci  $A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}$ , to  $A$  jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy

odwracalne są macierze  $B_1, B_2, \dots, B_k$ . Wówczas  $A^{-1} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k^{-1} \end{bmatrix}$ .