Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 3
Data: ....

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

3.1 Macierze i ich własności

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Ciąg liczbowy
$f(n) = a_n \in \mathbb{R}$ f $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 3.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m\times n}$.

m-ta kolumna

1-szy wiersz

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

wiersze

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ nazywamy *i-tym wierszem* macierzy A, zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ nazywamy *j-tą kolumną* macierzy A.

Oznaczmy symbolem $M_{m\times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K. Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n.*

$m \times m$ matrix

Dla $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ a_{ij} = b_{ij}$.

Przykład 3.1.2. $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$ 3 wiersze, 3 kolumny

$B \in M_3(\mathbb{R})$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ m. kwadratowa stopnia 3

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$ macierz zerowa wymiaru $m \times n$

UWAGA
$A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$
$A + \mathbb{O} = A$
↑ z kontekstu 2×3

Typy macierzy

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *diagonalną* lub *przekątniową*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ $\leftarrow$ nr. wiersza $\neq$ nr. kolumny

b) *trójkątną górną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$ nr. wiersza > nr. kolumny

c) *trójkątną dolną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$ OK!

Oznaczmy:
$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n
$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n
$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

$$T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$$

Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n może być OK

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

a_{23}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^D(K) \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^G(K)$$

b_{32}

Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. tensam wymiar
  $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ wyraz po wyrazie
- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
  $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
  Oznaczamy $-A = (-1) \cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$. $= A + (-1) \cdot B$
- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m\times \mathbf{p}}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{\mathbf{p}\times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$. $g \circ f$
  $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$
  Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{r-razy}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
  $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$
- Transponowanie: Niech $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$ nie tylko dla m. kwadr.
  $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n\times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$
  zmienia wymiar

1 wiersz → 1 kolumna c_{12} a_{21}
2 wiersz → 2 kolumna
...

Przykład 3.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB, BA, D^2.

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$D = AB \in M_2(\mathbb{R})$ schemat Falka

			B	
			0	1
			2	2
			-1	1
1	2	3	1	8
4	5	6	4	20

$1 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$

$A \in M_{2\times 3}$ $\quad B \in M_{3\times 2}$

iloczyn skalarny

$A \cdot B \in M_2(\mathbb{R})$ $[1,2,3] \circ [0,2,-1]$

poprawa

$G = BA \in M_3(\mathbb{R})$

		A		
		1	2	3
		4	5	6
0	1	4	5	6
2	2	10	14	18
-1	1	3	3	3

$BA \in M_3(\mathbb{R})$

$2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 10$

$AB \neq BA$

$f \circ g \neq g \circ f$

$f \circ f$

$\boxed{D^2 = D \cdot D} \in M_2(\mathbb{R})$, $CA \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, zaś AC jest niewykonalne

$CD \in M_2(\mathbb{R})$, $DC \in M_2(\mathbb{R})$, $CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$, ,$DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}$, $CD \neq CD$

nawet jeśli wymiary się zgadzają!

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m\times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

ustalony

i) $A + B = B + A$ przemienność

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ łączność

iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$ el. neutralny $+$

iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

+ liczb   + macierzy   rozdzielność

v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$ mieszana łączność

Wniosek 3.1.7. $(M_{m\times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

$A + (-A) = 0$

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(AB)C = A(BC)$ Łączność

ii) $(A + B)C = AC + BC$

iii) $A(B + C) = AB + AC$ rozdzielność • wzg + / 2 równania bo "nieprzemienne"

iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

v) $AI = A$ I el. neutralny $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A kwadratowa

vi) $IA = A$ AI

Wniosek 3.1.9. $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemienną z jedynką.

Twierdzenie 3.1.10. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$ $r=2$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$ wymiary OK

$A \cdot B$ (2×3, 3×4) $= AB$ (2×4) $(AB)^T$ (4×2)

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$ $r=2$

$A \cdot A$ $(A^2)^T = (A\cdot A)^T = A^T \cdot A^T = (A^T)^2$ + indukcja

BA niemożliwe B^T (4×3) A^T (3×2) $B^T \cdot A^T$ (4×2)

Definicja 3.1.11. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ nazywamy *śladem macierzy* A i oznaczamy symbolem $\mathrm{tr}(A)$. "trace"

Przykład 3.1.12. $\mathrm{tr}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

Własności śladu macierzy

Twierdzenie 3.1.13. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

Transponowanie "nie rusza" przekątnej

i) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$ ii) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

iii) $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\mathrm{tr}(A)$ iv) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Dowód. i), ii), iii) Wynika z definicji.
iv) Niech $C = AB = [c_{ij}]$, $D = BA = [d_{ij}]$. Wówczas $c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$ oraz $\mathrm{tr}C = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$. Ponadto $d_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}$ oraz $\mathrm{tr}D = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}$. Zatem $\mathrm{tr}C = \mathrm{tr}D$. $\square$

$tr(A^T B) = tr((A^T B)^T) =$
$= tr(B^T \cdot (A^T)^T) = tr(B^T \cdot A)$

ma przyswoić

Wniosek 3.1.14. Jeśli $A, B \in M_{m\times n}(K)$, to wówczas $\mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}(BA^T)$.

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.1.13 i) mamy $\mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}((A^T B)^T) = \mathrm{tr} B^T A$ oraz $\mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}((AB^T)^T) = \mathrm{tr}(BA^T)$. Ponadto $\mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ki} b_{ki}$ oraz $\mathrm{tr}(AB^T) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ik}$, skąd wynika teza. $\square$

Definicja 3.1.15. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

kwadratowa

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$ $\quad a_{ij} = a_{ji}$

przekątna $a_{ii} = -a_{ii}$

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$ $\quad a_{ij} = -a_{ji} \rightarrow$ wszczególności

Twierdzenie 3.1.16. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left[(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

$a_{12} = a_{21} = 2$

Przykład 3.1.17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna $\quad$ Symetria wzgl. diagonali

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antysymetryczna

$a_{ij} = -a_{ji}$

Definicja 3.1.18. Macierz utworzoną z macierzy B_{ij}, dla $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{in}$ stojące w i-tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{mj}$ stojące w j-tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

wyznacznik $\longrightarrow$ dla m. kwadratowych

rząd $\longrightarrow$ dla macierzy dowolnego wymiaru

3.2 Wyznacznik macierzy

!

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 3.2.1. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

$A = [a_{11}]$

determinant

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$
  $= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

suma nr. wiersza i nr. kolumny

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j-tej kolumny.

macierz

zmiana znaku

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

liczba   liczba

$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 18$ 17

$1 \cdot 2 - (-3) \cdot 5$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det B_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

$(-1)^3$

Metoda Sarrusa

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6)$$
$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{matrix}$$

$$-\left[3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2\right] = -59$$

odejmujemy

OK

$\det A = \det(A^T)$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K.

i) *Minorem elementu* a_{ij} nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n-1$ otrzymanej poprzez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A. Oznaczamy go symbolem M_{ij}.

ii) *Dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$

$a_{32} = -6$

$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$, $M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$

$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{23} = 17$ minor

dopełn. algebraiczne

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace'a)**.** Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$, $= a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}$

(rozwinięcie względem i-tego wiersza)

ii) $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{kj}$.

(rozwinięcie względem j-tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

nie liczymy

$\det C = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem czwartej kolumny,

a_{54}

a potem względem ostatniego wiersza.

$5+4$

$\det C = 4 \cdot (-1)^9 M_{54} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$

$-12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

mnożenie elementów na przekątnej

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

a_{11}

$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$

a_{11}

$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$A_1 \quad A_2$

Własności wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k-tą kolumnę macierzy A, czyli $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$.

Twierdzenie 3.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\det A = \det(A^T)$ ← wynika z tw. Laplace'a

ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.

iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.

iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \dots, B_k, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, C_k, \dots, A_n]$

v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$.

$k_1 \longleftrightarrow k_3$

vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$.

$0 = A_k - \lambda \cdot A_l$ kolumny proporcjonalne

vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K: \ A_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$.

! viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A, to wyznacznik nie zmieni się.

$A_1 + 2 \cdot A_2 + (-3) \cdot A_3$

ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ tw. Cauchy'ego

x) Jeśli macierz A jest macierzą blokową postaci

macierz zerowa

cokolwiek

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline ? & ? & \dots & B_n \end{array}\right],$$

gdzie $B_1, B_2, \dots, B_n$ są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni), $\mathbf{0}$ macierzami zerowymi, a ? dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \ldots \cdot \det B_n$.

Np

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 12$

$2 \cdot 2 \cdot 4$

$- 2 \cdot 2 \cdot 3$

$\det A = \det B + \det C$

$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} = A$

$B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Wniosek 3.2.10. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy. !

$\det(A) = \det(A^T)$

ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$ ← własność iii)

iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Np. $r = 2$

$\det(A^2) = \det(A \cdot A) \overset{\text{tw. Cauchy'ego}}{=} (\det A) \cdot (\det A) = (\det A)^2$ + Dowód indukc.

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

Operacje elementarne:

$w_i \leftrightarrow w_j$	zamiana wierszy miejscami	zmieniają wyznacznik
$\lambda \cdot w_i,\ \lambda \in K, \lambda \neq 0$	pomnożenie wiersza przez liczbę	
$w_i + \lambda \cdot w_j,\ \lambda \in K$	dodanie do w_i wielokrotności w_j	nie zmienia wyznacznika

Przykład 3.2.11.

ani jednego "0"

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{w_1 \leftrightarrow w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{w_4 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}}{\overset{w_2 - 2w_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_3 - w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

tego sobie nie zepsuję

$$\overset{-\frac{1}{3} \cdot w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_4 + 5w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{22}{3} = -22$$

3.3 Macierz odwrotna

m. kwadratowa

Definicja 3.3.1. Macierz $B \in \boxed{M_n(K)}$ nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy $A \in M_n(K)$, jeżeli $AB = BA = I_n$. Oznaczamy ją wówczas symbolem A^{-1}.

Przykład 3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{?}{=} ?$$

$$AA^{-1} = I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_2} \quad \Rightarrow \quad c = 0 \wedge \quad c = 1 \text{ sprzeczność}$$

Zatem nie istnieje A^{-1}.

A^{-1}

A

Definicja 3.3.3. i) Macierz $A \in M_n(K)$, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy macierzą *odwracalną*.

ii) Macierz $A \in M_n(K)$ taką, że $\det A = 0$ nazywamy macierzą *osobliwą*. W przeciwnym wypadku nazywamy ją macierzą *nieosobliwą*.

$\Leftrightarrow$ wtw.

Twierdzenie 3.3.4. a) Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

b) Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$.

transponuj.

$a_{ij} \longrightarrow D_{ij}$

$\det A \neq 0 \quad \frac{1}{\det A} \in K$

Definicja 3.3.5. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Macierz D^T nazywamy *macierzą dołączoną* do macierzy A i oznaczamy symbolem A^D.

Wniosek 3.3.6. Zbiór macierzy kwadratowych nieosobliwych stopnia n o elementach z ciała K wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę nieprzemienną. Grupę tę oznaczamy symbolem $GL_n(K)$ i nazywamy *ogólną grupą liniową*.

general linear group

$GL(n, K)$

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

1. **Za pomocą definicji**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{matrix} \\ \hline A^{-1} \; \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}$$

Przykład 3.3.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$

$\det A = 11 \neq 0$, zatem A jest odwracalna.

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a - b & 5a + 2b \\ 3c - d & 5c + 2d \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{3a - b = 1} \\ 5a + 2b = 0 \\ 3c - d = 0 \\ 5c + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

nieefektywne dla dużych "n"

2. **Metoda dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa)**

Przykład 3.3.8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D = ?$$

$\det A = -3 \neq 0$, zatem A jest odwracalna. Niech $M = [M_{ij}]$ oznacza macierz minorów elementów a_{ij}. Wówczas

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$4 = a_{23}$

$\underbrace{\frac{1}{\det A} \cdot D^T}$

$$D = [D_{ij}] = [(-1)^{j+j} M_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$

$(-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot 3$

3. Metoda operacji elementarnych (metoda bezwyznacznikowa)

op. elem.
$w_i \leftrightarrow w_j$
$\alpha \cdot w_i \quad \alpha \neq 0$
$w_i + \beta \cdot w_j$

Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą.

macierz blokowa

$$[A|I] \xrightarrow[\textbf{tylko na wierszach!}]{\textit{operacje elementarne}} [I|A^{-1}]$$

Algorytm Gaussa: macierz nieosobliwa $\longrightarrow$ macierz trójkątna górna $\longrightarrow I$

Metoda eliminacji Gaussa to praktyczny sposób używania metody operacji elementarnych.

Przykład 3.3.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

I_4

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \, na \, koniec]{-\frac{1}{2}w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 + w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}w_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 + w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}}_{A^{-1}}\right]$$

Zatem
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Własności macierzy odwrotnej

Twierdzenie 3.3.10. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli macierze A i B są odwracalne, to wówczas macierze $A^{-1}, A^T, AB, \alpha A, A^r$ również są odwracalne i prawdziwe są następujące równości.

$(\alpha \cdot A) = \alpha^{-1} \cdot A^{-1}$

i) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

ii) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

iii) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$

iv) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$

v) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

vi) $(A^r)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^r$

$1 = \det I = \det(A \cdot A^{-1}) \overset{\text{tw. Cauchy}}{=} (\det A) \cdot (\det A^{-1}) \Rightarrow$

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$r = 2$

$(A \cdot A)^{-1} = (A^{-1}) \cdot (A^{-1}) = (A^{-1})^2$

$\| $

$(A^2)^{-1}$

+ dow. ind

$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

Twierdzenie 3.3.11. Jeśli macierz kwadratowa A jest macierzą blokowo-diagonalną postaci $A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}$, to A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalne są macierze $B_1, B_2, \dots, B_k$. Wówczas $A^{-1} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k^{-1} \end{bmatrix}$.