Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 4
Data: ....

TEMAT: *Macierz odwrotna. Układy równań liniowych*

4.1 Układy równań liniowych

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K,\ i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

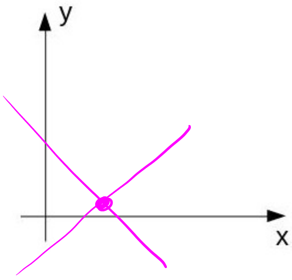
Liczby $a_{ij} \in K$ nazywamy *współczynnikami* układu, zaś liczby b_i *wyrazami wolnymi* Jeśli $b_1 = \ldots = b_m = 0$ to układ równań nazywamy *jednorodnym*. Jesli $b_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, to układ nazywamy *niejednorodnym*.

Rozwiązaniem układu nazywamy dowolny ciąg $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in K^n$ spełniający ten układ. Układ nie posiadający rozwiązania nazywamy *układem sprzecznym*, układ posiadający dokładnie jedno rozwiązanie - *układem oznaczonym*, zaś układ posiadający nieskończenie wiele rozwiązań - *układem nieoznaczonym*.

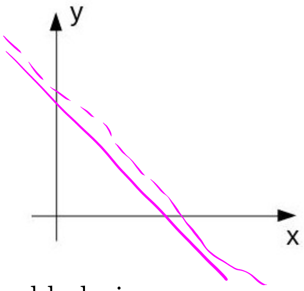
Przykład 4.1.1.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

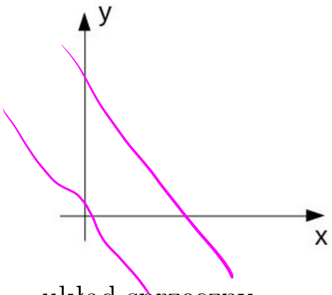
równania prostych na płaszczyźnie



układ oznaczony



układ nieoznaczony

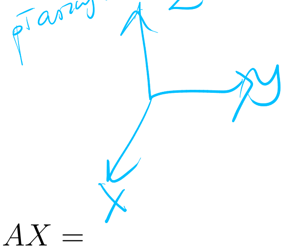


układ sprzeczny

$m=3$

$Ax+By+Cz=D$

płaszczyzna

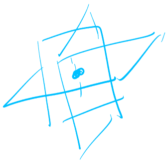


Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz współczynników — kolumna niewiadomych — kolumna wyrazów wolnych

1 row



sprzeny

∅

Przykład 4.1.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Układy Cramera

liczba równań = liczbie niewiadomych $\Rightarrow$ A - m. kwadratowa

Definicja 4.1.3. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy *układem Cramera.*

$\det A \neq 0$

Twierdzenie 4.1.4 (Cramera)**.** Układ Cramera jest układem oznaczonym.

$0 \neq \det A$

Dowód. Ponieważ $\det A \neq 0 \;\Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$, mamy $X = A^{-1}B$. ☐

$AX=B$

Wniosek 4.1.5. Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą *wzorów Cramera*

$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} X = A^{-1}B$

$m=2$ $\quad W = \det A$

W_x, W_y

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

$X = A^{-1}B$

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.

$$A = \begin{array}{cc} x & y \\ \hline 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad W_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Dowód. $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} D^T B = \frac{1}{\det A}[D_{ji}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Stąd $x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{i=1}^n b_i D_{ij} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. $\square$

Przykład 4.1.6.

Układ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ jest równoważny równaniu $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$W = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \underline{16 \neq 0} \Rightarrow$ układ jest układem Cramera $\Rightarrow \exists !$ rozw.

Metoda eliminacji:

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, zatem $2x + 4(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) = 1$, skąd $x = \frac{11}{8}$ oraz $y = -\frac{7}{16}$

Rozwiązanie równania macierzowego:

$\frac{1}{\det A} D^T$ $X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1}B$, $A^{-1} = ?$

$\det A = 16$, $D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 22 \\ -7 \end{bmatrix}$, $x = \frac{11}{8}$, $y = -\frac{7}{16}$

Wzory Cramera:

B B

$W = \det A = 16 \neq 0$, $W_x = \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22$, $W_y = \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$,

$x = \frac{W_x}{W} = \frac{22}{16}$, $y = \frac{W_y}{W} = -\frac{7}{16}$

Wniosek 4.1.7. i) Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

ii) Jeśli $\det A = 0$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Przykład 4.1.8.

Układ $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$ jest układem sprzecznym. Ponadto $W = W_x = W_y = 0$.

Uwaga 4.1.9. i) Można wykazać, że jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to układ jest sprzeczny.

ii) Jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_i = 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to układ jest nieoznaczony lub sprzeczny. !

$m \neq n$ na ogół

l. równań ≠ l. niewiadomych

A - nie jest kwadratowa

~~det A~~

Rząd macierzy

Definicja 4.1.10. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$. *Minorem stopnia* k macierzy A, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m,n\}$ nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A poprzez skreślenie $m-k$ wierszy oraz $n-k$ kolumn.

Definicja 4.1.11. *Rzędem macierzy* $A \in M_{m\times n}(K)$, $A \neq \mathbf{0}$ nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Liczbę tę oznaczamy $r(A)$ lub $\mathrm{rank}(A)$. Ponadto przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy zero.

$rz(A)$

$$r(A) \leq \min\{m,n\}$$

Przykład 4.1.12.

$A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 3,\ \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -50 \neq 0,\ r(A) = 3$$

$[1,4,3,2] \in \mathbb{R}^4$

$[3,12,9,6]$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ \boxed{3} & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 2,\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

4×2

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ r(B) = 1,$$ Można zauważyć, że $k_2 = 3k_1$.

"liniowa zależność"

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 2,\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ ale } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,\ r(C) = 2$$

wystarczy znaleźć jeden niezerowy

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 3,\ w_2 = 2w_1,\ w_3 = 3w_1,\ r(D) = 1$$

$w_3 = w_1 + w_2$

Twierdzenie 4.1.13 (Własności rzędu macierzy)**.** Niech $A \in M_{m\times n}(K)$. Wówczas

i) $r(A) = r(A^T)$,

ii) operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy nie zmieniają jej rzędu.

Dowód. Teza wynika z własności wyznaczników. □

Definicja 4.1.14. Macierz $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy *macierzą schodkową*, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Ponadto przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

Przykład 4.1.15.

Skredam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

4 schodki 3 schodki to nie postać schodkowa

?

rosnących

trzeba coś jeszcze zrobić by mieć p. schodkową

4×6

$r(A) \leq 4$

pivots

RREF

Row reduced echelon form

Twierdzenie 4.1.16. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. schodków).

Dowód. Skreślając wiersze zerowe i kolumny nie wyznaczające schodków, otrzymamy macierz trójkątna górną nieosobliwą. ☐

Przykład 4.1.17.

$$D = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$D \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$

$r(D) \leq 4$

$$D \xrightarrow[\substack{w_3-4w_1 \\ w_4-4w_1}]{w_2-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -8 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4+w_2]{w_3+2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-6} & \cancel{-9} & \cancel{-17} \end{bmatrix}, \quad r(D) = 3$$

$w_4 - w_3$

0 0 0 0 0

4.2 Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K postaci $AX = B$.

macierz blokowa

Macierz $U = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in M_{m\times(n+1)}(K)$ nazywamy *macierzą uzupełnioną* układu $AX = B$.

(choć jedno!)

Twierdzenie 4.2.1 (Kroneckera-Capellego)**.** Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(U)$.

Dowód. Oznaczmy przez $A_1, \ldots, A_n$ kolejne kolumny macierzy A. Układ równoważny jest równaniu $x_1A_1 + \ldots + x_nA_n = B$. Układ posiada zatem rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy kolumna B jest kombinacja liniową kolumn $A_1, \ldots, A_n$. ☐

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Wniosek 4.2.2. i) Gdy $r(A) \neq r(U)$, układ jest sprzeczny. ← kontrapozycja

ii) Gdy $r(A) = r(U) = n$, układ jest oznaczony.

iii) Gdy $r(A) = r(U) = r < n$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Przykład 4.2.3.

$$\begin{cases} x - y + 3z &= 5 \\ 4x + y + 7z &= 8 \\ 5x + 2y + 8z &= 4 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 4 \end{array}\right], \; r(A) \le 3, \; r(U) \le 3$$

A B

det A = 0 ⇒ $r(A) \neq 3$

$r(A) \le 2$

Ćw

$\det A = 0$ oraz $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, zatem $r(A) = 2$

$$U \xrightarrow[w_3-5w_1]{w_2-4w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{7}w_3]{\frac{1}{5}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

A 2 schodki

3 schodki U

$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -\frac{3}{5}$

sprzeczność

$r(U) = 3 \neq \underset{\overset{\|}{2}}{r(A)}$ ⇒ układ sprzeczny, brak rozwiązań

koniec

Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

$r(A) \neq r(U)$

1. Jeśli $r(A) < r(U)$, układ jest sprzeczny.

$r(A) > r(U)$ niemożliwa ← każdy minor A jest minorem U

2. Niech $r(A) = r(U) = r$. Istnieje niezerowy minor M stopnia r macierzy A (będący również minorem macierzy U). Wówczas układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

2a. Skreślamy $m - r$ wierszy macierzy U (równań układu), które nie tworzą M. Jeśli $r = n$, to otrzymujemy układ Cramera.

2b. Jeśli $r < n$, to $n - r$ niewiadomych, których współczynniki nie tworzą M, przenosimy na stronę wyrazów wolnych i traktujemy je dalej jako parametry (zmienne niezależne). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów. Mówiąc dokładnej r spośród niewiadomych oznaczanych $x'_1, \ldots, x'_r$ zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$.

Przykład 4.2.4.

$-y + 2x + 3z =$

$n = 3$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + 2y - 5z = 4 \\ 4x + 5y - 13z = 1 \end{cases}$$

minor A

minor U

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{array}\right], \; r(A) \le 3, \; r(U) \le 3$$

$r(A) = 2 = r(U)$

$\|$

$r < n = 3$

$$U \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{y} \;\; \mathbf{x} \;\; \mathbf{z}]{k_1 \leftrightarrow k_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & -13 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+5w_1]{w_2+2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \\ \cancel{0} & \cancel{14} & \cancel{2} & \cancel{36} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

$W_3 = 2 \cdot W_2$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$ minor niezerowy

$W \neq 0$

$$\begin{cases} -y + 2x = 7 - 3z \\ 7x = 18 - z \end{cases} \text{ lub } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3z \\ 18 - z \end{bmatrix}$$

$W_y \quad W_x, \; x, \; y = ?$

układ nieoznaczony, rozwiązania $\begin{cases} x = \frac{18}{7} - \frac{1}{7}z \\ y = -\frac{13}{7} + \frac{20}{7}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

∞ wiele rozw. zależnych od 1 parametru

Metoda eliminacji Gaussa

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, gdy posiadają ten sam zbiór rozwiązań. Operacje elementarne na wierszach macierzy U, skreślenie wiersza złożonego z samych zer lub skreślenie jednego z dwu wierszy proporcjonalnych (równych) nie zmieniają rzędu macierzy U, zatem prowadzą one do równoważnego układu równań. Ewentualne przestawienie kolumn macierzy A prowadzi do zmiany kolejności występowania niewiadomych.

tylko!

$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$ to tożsamość

Dokonując równoważnych przekształceń układu równań $AX = B$, sprowadzamy macierz $U = [A|B]$ do postaci

A) B)

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} & z_1 \\ & I_r & & & \dots & & \dots \\ & & & s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} & z_r \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right].$$

Układ równań przeczący

Jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.

$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 5$ sprzeczne!

jedno równanie sprzeczne to układ sprzeczny

Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r = n$, układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest $x_i = z_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r < n$, układ jest nieoznaczony. Rozwiązania mają postać

jak wyżej na rysunku

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} \\ & \dots & \\ s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

$A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$

$n = 4$

$r(U) \leq 3$

$r(A) \leq 3$

na pewno nie jest oznaczony!

Przykład 4.2.5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Równanie $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$ jest sprzeczne, zatem układ jest sprzeczny.

$-x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1$

$— \| — = 0$

Przykład 4.2.6. $A \in M_5(\mathbb{R})$ $U \in M_{5\times 6}$

$r(A) \le 5$

$r(U) \le 5$

$$\begin{cases} 2x+4y+9z-5t+6u &= 13\\ x+2y+4z-4t+2u &= 5\\ 3x+6y+7z-11t+2u &= 18\\ 4x+8y+19z-15t+11u &= 20\\ -\frac{1}{2}x-y+z+3t+2u &= -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$U=\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13\\ 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5\\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18\\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20\\ -\frac12 & -1 & 1 & 3 & 2 & -\frac52 \end{array}\right] \xrightarrow[-2\cdot w_5]{w_2\leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13\\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18\\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20\\ 1 & 2 & -2 & -6 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4-4w_1\\ w_5-w_1}]{\substack{w_2-2w_1\\ w_3-3w_1}}$$

$W_5 = 2\cdot W_4$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{-2} & \cancel{-6} & \cancel{0} \end{array}\right] \xrightarrow[zmienne\ \mathbf{x\,z\,t\,u\,y}]{k_2\ za\ k_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -5 & 1 & -4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4-3w_2]{w_3+5w_2}$$

$W_4 = -\frac{1}{2}\cdot W_3$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{16} & \cancel{6} & \cancel{0} & \cancel{18}\\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} x & z & t & u & y & \\ \hline 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[zmienne\ \mathbf{x\ z\ u\ t\ y}]{k_3\leftrightarrow k_4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac13 w_3} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & \frac83 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2-2w_3]{w_1-2w_3} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 0 & -\frac{28}{3} & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac73 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & \frac83 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

do I_3

param.

mnoż.

$$\xrightarrow{w_1-4w_2} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 11\\ 0 & 1 & 0 & -\frac73 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & \frac83 & 0 & 3\\ \hline x & z & u & t & y & \end{array}\right]$$

I_3

równoważny układ $\begin{cases} x+2y=11\\ z-\frac73 t=-3\\ u+\frac83 t=3 \end{cases}$ rozwiązania $\begin{cases} x=11-2y\\ z=-3+\frac73 t\\ u=3-\frac83 t\\ y,t\in\mathbb{R} \end{cases}$

$r(A)=r(U)=3<n=5$ układ nieoznaczony, nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $5-3=2$ parametrów

Uwaga 4.2.7. Podział niewiadomych na zmienne zależne i parametry nie jest jednoznaczny, lecz nie jest dowolny. !

Przykład 4.2.8. Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniu układu równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$$

3×5

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & s & t & \end{array}\right] \qquad r := r(A) = r(U) = 2,\ n = 5,\ n - r = 3 \text{ parametry}$$

Trzy zmienne spośród pięciu można wybrać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów.
Nie wszystkie wybory są dozwolone.

minory niezerowe	parametry
k_1, k_3	$\{y, s, t\}$
k_1, k_5	$\{y, z, s\}$
k_2, k_3	$\{x, s, t\}$
k_2, k_5	$\{x, z, s\}$
k_4, k_3	$\{x, y, t\}$
k_4, k_5	$\{x, y, z\}$
k_3, k_5	$\{x, y, s\}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

7 możliwości

x y
x s
y s

nie mogą tworzyć niezerow. minora

Uwaga 4.2.9. W przypadku gdy układ równań $AX = B$ jest układem Cramera, wykonując operacje elementarne **na wierszach** macierzy uzupełnionej $U = [A|B]$, sprowadzamy tę macierz do postaci $[I|X]$, gdzie X jest poszukiwanym rozwiązaniem układu.

$$[A|B] \xrightarrow[\textbf{na wierszach}]{\textit{operacje elementarne}} [I|X]$$

!

$r(U) \leq n$

$U \in M_{n \times (n+1)}$

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$\det A \neq 0$

$\Downarrow$

$r(A) = n$
$\|$
$r(U)$

Przykład 4.2.10.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{3}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 + w_3]{w_1 + w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1) \cdot w_3]{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \cancel{2}\ 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

I_3

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

układ oznaczony, jedyne rozwiązanie $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ -z = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow z = 1$

$y = 2 - z = 1$

$x = 3 - y - z = 3 - 1 - 1 = 1$

Przykład 4.2.11. Określ ilość rozwiązań układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

Nie rozwiązuj!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2p+4)x_3 + (4p+6)x_4 = p+15 \\ (p+1)x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = p+4 \\ x_1 + 2x_2 + (p+3)x_3 + (2p+2)x_4 = 11 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 2 & 4 & 2p+4 & 4p+6 & p+15 \\ p+1 & 2 & p+1 & p+3 & p+4 \\ 1 & 2 & p+3 & 2p+2 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-w_2 \\ w_4-w_1}]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2p & p+7 \\ p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 2 & p+1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x_2\, x_3\, x_1\, x_4}]{k_1 \text{ za } k_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 2 & 0 & p+1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & -p \end{array}\right]$$

Wnioski:

Dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ mamy $r(A) = r(U) = n = 4$, zatem układ jest oznaczony.

Dla $p = 0$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

skąd otrzymujemy, że $r(A) = r(U) = 3 < n = 4$.
Zatem układ jest nieoznaczony.
Posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Dla $p = 1$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$,

skąd otrzymujemy, że układ jest sprzeczny.

$r(A) = 3$ $\quad$ $r(A) = 4$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -1$

↯