

TEMAT: *Geometria analityczna w \mathbb{R}^3*

5.1 Wektory w przestrzeni

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować jako:

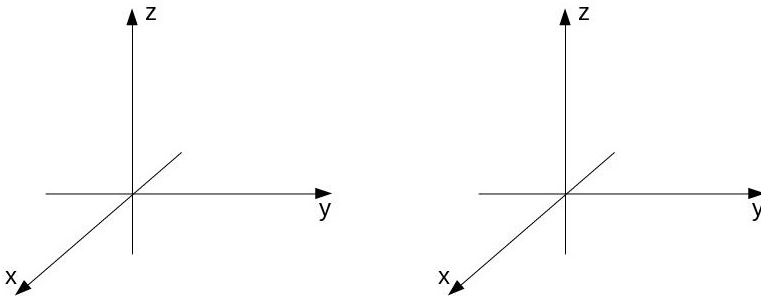
- zbiór punktów $P = (x, y, z)$, gdzie x, y, z to współrzędne punktu
- zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = [x, y, z]$, gdzie x, y, z to współrzędne wektora
- zbiór wektorów swobodnych \vec{a} . Wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów zaczepionych (w różnych punktach) mających ten sam zwrot, kierunek i długość.

Oznaczamy przez $\vec{0} = [0, 0, 0]$ wektor zerowy.

Działania na wektorach

Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z]$ suma wektorów
- $\lambda \cdot \vec{u} = [\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z]$ iloczyn wektora przez skalar
- $-\vec{u} = [-u_x, -u_y, -u_z]$ wektor przeciwny do \vec{u}
- $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$ różnica wektorów



Długość wektora

Oznaczamy przez $|\vec{u}|$ długość wektora \vec{u} . Jeśli $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to wówczas

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \quad |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Wektor długości 1 nazywamy *wersorem*. Oznaczamy przez $\hat{i} = [1, 0, 0]$, $\hat{j} = [0, 1, 0]$, $\hat{k} = [0, 0, 1]$ wersory osi układu współrzędnych. Wówczas zapis $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ oznacza $\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$. Ponadto $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

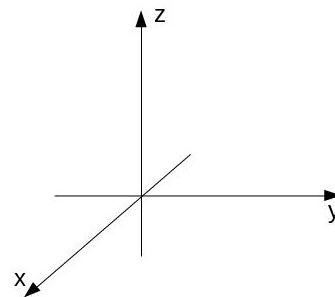
Własności długości: $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$, $|\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$, $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Wersorem niezerowego wektora \vec{u} nazywamy wersor o tym samym kierunku i zwrocie co \vec{u} . Oznaczamy go \hat{u} . Oczywiście $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$.

Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, to $\hat{u} = \left[\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|} \right]$ oraz

$$|\hat{u}| = \sqrt{\frac{u_x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_z^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{1}{|\vec{u}|} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1.$$

Jeśli wektor $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych kąty α, β, γ , odpowiednio, to kąty te nazywamy *kątami kierunkowymi*, zaś współrzędne wersora \hat{u} , czyli liczby $\cos \alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|}$, $\cos \beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}$, $\cos \gamma = \frac{u_z}{|\vec{u}|}$ nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora \vec{u} .



Iloczyn skalarny

Oznaczamy przez $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ kąt między wektorami \vec{u}, \vec{v} . Przyjmujemy, że należy on do przedziału $[0, \pi]$.

Definicja 5.1.1. *Iloczynem skalarnym* dwóch niezerowych wektorów \vec{u}, \vec{v} nazywamy liczbę $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$. Oznaczamy ją symbolem $\vec{u} \circ \vec{v}$. Gdy jeden z wektorów jest zerowy, przyjmujemy, że iloczyn jest równy 0.

Twierdzenie 5.1.2. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas $\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

Przykład 5.1.3. $[1, 4, 0] \circ [2, -1, 1] = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -2 < 0$
Cosinus kąta między wektorami jest ujemny, zatem kąt jest rozwarty.

Twierdzenie 5.1.4 (Własności iloczynu skalarnego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$

ii) $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$

iii) $(\lambda \vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v})$

iv) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$

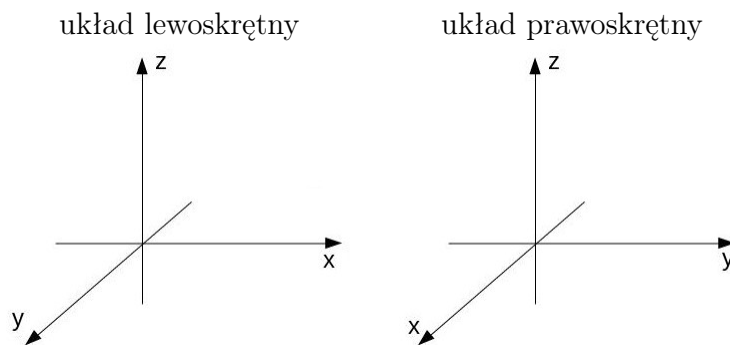
v) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

vi) $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Dowód. Wynika wprost z definicji. \square

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych w \mathbb{R}^3 - trójka wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w jednym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych.



Definicja 5.1.5. Uporządkowana trójka wektorów $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ma *orientację zgodną* z orientacją układu współrzędnych, jeśli

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0.$$

Iloczyn wektorowy

Dwa wektory \vec{u}, \vec{v} nazywamy *współliniowymi* lub *kolinearnymi*, gdy istnieje prosta, w której zawate są te wektory. Piszemy wówczas $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Definicja 5.1.6. *Iloczynem wektorowym* uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów \vec{u}, \vec{v} nazywamy wektor \vec{w} taki, że:

i) $\vec{w} \perp \vec{u}, \vec{w} \perp \vec{v}$,

ii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$,

iii) orientacja trójki $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.

Wektor \vec{w} oznaczamy symbolem $\vec{u} \times \vec{v}$.

Jeśli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to przyjmujemy $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Przykład 5.1.7. $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
 $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

Twierdzenie 5.1.8. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z], \vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Dowód. Niech $\vec{w} = \left[\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right]$. Uzasadnimy, że \vec{w} ma ten sam kierunek, zwrot oraz długość co wektor $\vec{u} \times \vec{v}$.

Zauważmy, że $\vec{w} \perp \vec{u}$ oraz $\vec{w} \perp \vec{v}$. Istotnie $\vec{w} \circ \vec{u} = u_x \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} +$

$$u_z \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0 \text{ i podobnie } \vec{w} \circ \vec{v} = 0.$$

Ponadto $|\vec{w}| = |\vec{u} \times \vec{v}|$, bowiem $|\vec{w}|^2 = (u_y v_z - v_y u_z)^2 + (u_x v_z - v_x u_z)^2 + (u_x v_y - v_x u_y)^2 =$
 $= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \circ \vec{v})^2 =$
 $= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot (1 - \cos^2 \angle(\vec{u}, \vec{v})) = \left(|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \right)^2.$

Jeśli \vec{u}, \vec{v} są niewspółliniowe, to $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, skąd wynika, że $|\vec{w}| > 0$.

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = w_x \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = |\vec{w}|^2.$$

Jak zaobserwowaliśmy $|\vec{w}|^2 > 0$, więc trójka $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ma orientację zgodną z orientacją układu współrzędnych. \square

Przykład 5.1.9. Niech $\vec{u} = [1, 2, -3], \vec{v} = [3, 4, 5]$. Korzystamy z twierdzenia Laplace'a

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = [22, -14, -2]$$

lub metody Sarrusa

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10\hat{i} + 4\hat{k} - 9\hat{j} - 6\hat{k} + 12\hat{i} - 5\hat{j} = 22\hat{i} - 14\hat{j} - 2\hat{k}.$$

Twierdzenie 5.1.10 (Własności iloczynu wektorowego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

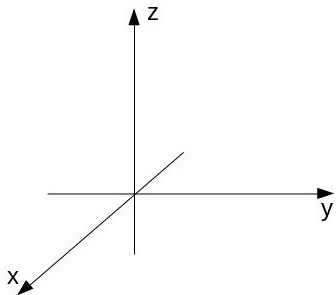
- i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ iv) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
 ii) $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$ v) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
 iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$ vi) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0})$

Dowód. Własności i),ii),iii),iv) wynikają z odpowiednich własności wyznaczników.

v) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

vi) Jeśli $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, to $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \{0, \pi\}$. \square

Reguła prawej dłoni:



Uwaga 5.1.11. Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach \vec{u}, \vec{v} równe jest $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Iloczyn mieszany

Definicja 5.1.12. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z], \vec{v} = [v_x, v_y, v_z], \vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. *Iloczynem mieszanym* uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy liczbę $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$. Oznaczamy ją symbolem $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Twierdzenie 5.1.13. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z], \vec{v} = [v_x, v_y, v_z], \vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Wówczas

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Dowód.
$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = w_x \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} =$$

$$= [w_x, w_y, w_z] \circ \left[\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right] = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v}) \quad \square$$

Uwaga 5.1.14. Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ równa jest $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

Dowód. Niech $\alpha = \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$. Ponieważ $V = P_p \cdot d = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h$ oraz $\cos \alpha = \frac{h}{|\vec{w}|}$, zatem $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \alpha = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$. \square

Przykład 5.1.15. Czy punkty $A = (1, 0, 2), B = (5, 1, 5), C = (3, -1, 2), D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie?

Punkty leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy objętość czworokąta rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ jest równa zero.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [4, 1, 3], \overrightarrow{AC} = [2, -1, 0], \overrightarrow{AD} = [0, 3, 3] \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 18 - 6 = 0 \end{aligned}$$

Punkty są współpłaszczyznowe (komplanarne).

Twierdzenie 5.1.16 (Własności iloczynu mieszanego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ prawdziwe są następujące równości.

- i) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$
- ii) $\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w})$
- iii) $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}) = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}) + (\vec{v}, \vec{w}, \vec{a})$
- iv) $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$

Dowód. i), ii), iii) Teza wynika z odpowiednich własności wyznacznika.

iv) Niech α to kąt między wektorami $\vec{u} \times \vec{v}$ oraz \vec{w} . Wówczas $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot |\cos \alpha| \leq |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$. \square

5.2 Płaszczyzna w przestrzeni \mathbb{R}^3

Równanie ogólne i normalne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}\}$$

jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i prostopadłą do wektora \vec{n} . Wektor \vec{n} nazywamy *wektorem normalnym* płaszczyzny π .

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Równanie normalne: $\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Równanie ogólne: $\pi : Ax + By + Cz + D = 0, D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Przykład 5.2.1. $P_0 = (1, 2, 5)$, $\vec{n} = [1, -1, 3]$, $P_0 \in \pi$, $\vec{n} \perp \pi$, $\pi = ?$

$\pi : 1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 5) = 0$ równanie normalne

$\pi : x - y + 3z - 14 = 0$ równanie ogólne

Równanie parametryczne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}$, $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z] \neq \vec{0}$ ustalonymi wektorami niewspółliniowymi, tj. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists t, s \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b}\}$$

jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektorów \vec{a}, \vec{b} . Mówimy, że wektory \vec{a}, \vec{b} są *wektorami rozpinającymi* płaszczyznę π .

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t[a_x, a_y, a_z] + s[b_x, b_y, b_z]$$

$$\text{Równanie parametryczne: } \pi : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x + s \cdot b_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y + s \cdot b_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z + s \cdot b_z \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$$

Przykład 5.2.2. Napisz równanie parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 4)$, $B = (2, 5, 4)$ i równoległej do osi Oy .

$$\overrightarrow{AB} = [1, 4, 0] \parallel \pi, \quad \hat{j} = [0, 1, 0] \parallel Oy \Rightarrow \hat{j} \parallel \pi, \quad A \in \pi$$

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot s = 1 + t \\ y = 1 + 4 \cdot t + 1 \cdot s = 1 + 4t + s \\ z = 4 + 0 \cdot t + 0 \cdot s = 4 \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$$

Inne równania płaszczyzny

Równanie postaci $\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, opisuje płaszczyznę przechodzącą przez punkty $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$. Jest to tzw. *równanie odcinkowe* płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ma postać

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, ponieważ $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1] \parallel \pi$ oraz $\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \perp \pi$, zatem

$$\pi = \{P = (x, y, z) : \overrightarrow{P_1P} \perp \vec{n}\} = \{P = (x, y, z) : [x - x_1, y - y_1, z - z_1] \circ \vec{n} = 0\}.$$

5.3 Prosta w przestrzeni \mathbb{R}^3

Równanie parametryczne i kierunkowe prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$l = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a}\}$$

jest prostą przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektora \vec{a} . Wektor \vec{a} nazywamy *wektorem kierunkowym* prostej l .

$$P_0 \in l \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$

Równanie postaci $l : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ nazywamy *równaniem parametrycznym* prostej l .

Rugując z każdego z powyższych równań parametr t otrzymujemy równanie postaci $l : \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$, które nazywamy *równaniem kierunkowym* prostej l .

Równanie krawędziowe prostej

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, gdzie $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ będą dwiema nierównoległymi płaszczyznami. Ich częścią wspólną jest prosta $l = \pi_1 \cap \pi_2$.

$$P \in l \Leftrightarrow (P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2)$$

Równanie krawędziowe: $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

Przykład 5.3.1. Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 3, 1)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Oznaczmy $\vec{n}_1 = [6, -1, 1] \perp \pi_1$, $\vec{n}_2 = [1, 3, -2] \perp \pi_2$ oraz $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel l$.

$$\text{Wówczas } \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = [-1, 13, 19] \text{ oraz } l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 13t \\ z = 1 + 19t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5.4 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

Wzajemne położenie płaszczyzn

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n}_1 = [A_1, B_1, C_1] \neq \vec{0}$,
 $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = [A_2, B_2, C_2] \neq \vec{0}$.

Szukanie punktów wspólnych π_1 oraz π_2 polega na rozwiązaniu układu równań $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 \\ -D_2 \end{bmatrix}.$$

Niech $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{bmatrix}$.

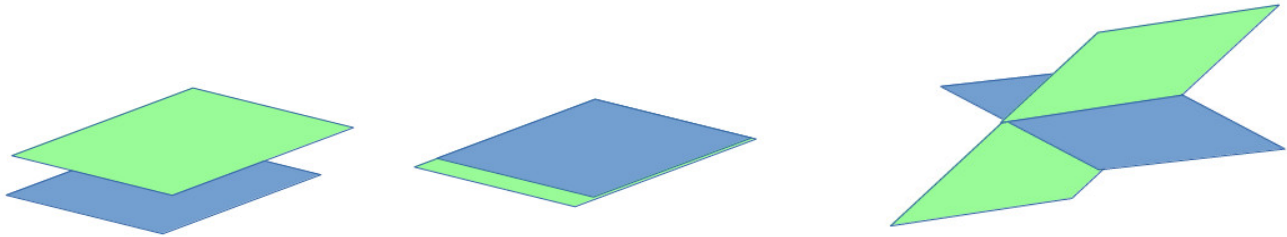
Płaszczyzny mogą być równoległe. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$

Wówczas albo $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = r(A) = 1$

albo $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = 2, r(A) = 1$.

Gdy $r(U) = r(A) = 2$, płaszczyzny $\pi_1 \not\parallel \pi_2$ przecinają się wzdłuż prostej. W szczególności mogą być prostopadłe.

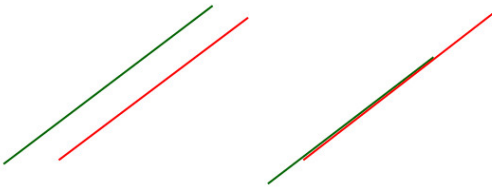
$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 0$$



Wzajemne położenie prostych

Niech \vec{a} będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś \vec{b} wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 .

Proste mogą być równoległe. $l \parallel k \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
Wówczas albo $l = k$, albo $l \cap k = \emptyset$.

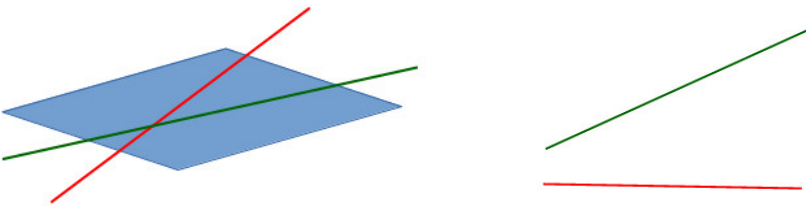


Gdy $l \not\parallel k$, możliwe są dwie sytuacje.

1) Proste l i k leżą w jednej płaszczyźnie, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas l i k mają jeden punkt wspólny tj. $l \cap k = \{P\}$,

2) Proste l i k nie leżą w jednej płaszczyźnie (tzw. *proste skośne*), co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas $l \cap k = \emptyset$.

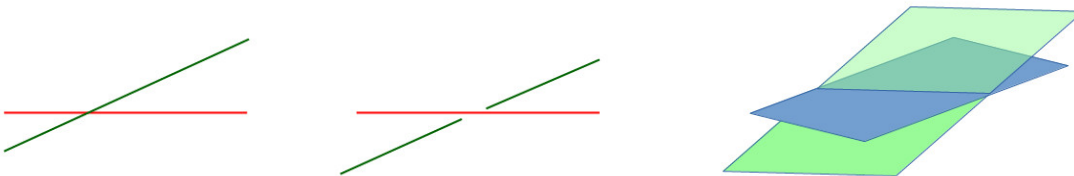
Zatem proste l i k są skośne wtedy i tylko wtedy gdy $(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0$.



Kąty

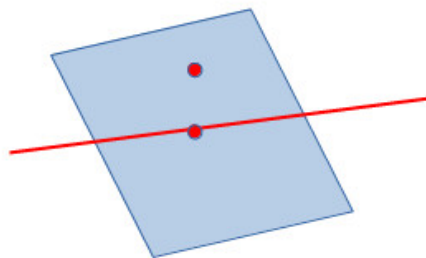
Definicja 5.4.1. i) *Kątem między dwiema prostymi* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy proste są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami kierunkowymi tychże prostych.

ii) *Kątem między dwiema płaszczyznami* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy płaszczyzny są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami normalnymi tychże płaszczyzn.



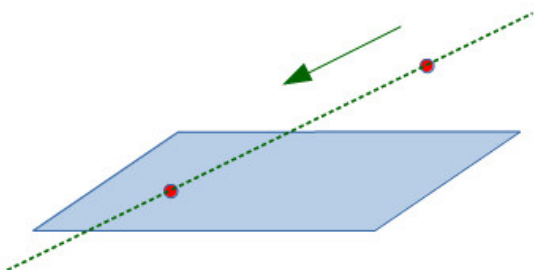
Definicja 5.4.2. i) *Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π nazywamy punkt $P' \in \pi$ taki, że $PP' \perp \pi$.*

ii) *Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l nazywamy punkt $P' \in l$ taki, że $PP' \perp l$.*

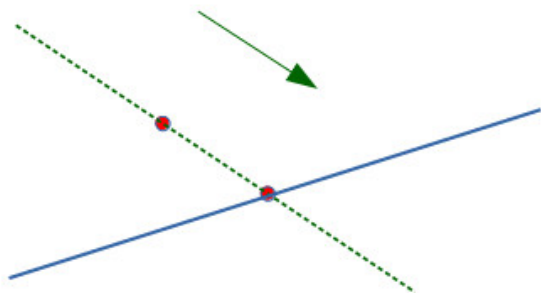


Można zdefiniować *rzut ukośny* w kierunku zadanego wektora.

Rzut punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora $\vec{v} \nparallel \pi$:

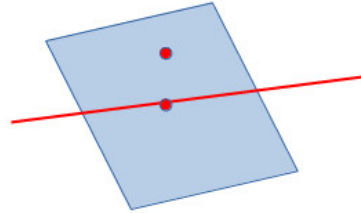


Rzut punktu P na prostą l w kierunku wektora \vec{v} , o którym zakładamy, że należy do płaszczyzny zawierającej P oraz l :



Przykład 5.4.3. Wyznacz rzut prostokątny punktu $P = (4, 5, -3)$ na płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 3 + t + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$$



Niech k będzie prostą taką, że $k \perp \pi$, $P \in k$.

$$\vec{u} = [2, 0, 1] \parallel \pi, \quad \vec{v} = [1, 3, 1] \parallel \pi, \quad A = (2, 1, 3) \in \pi$$

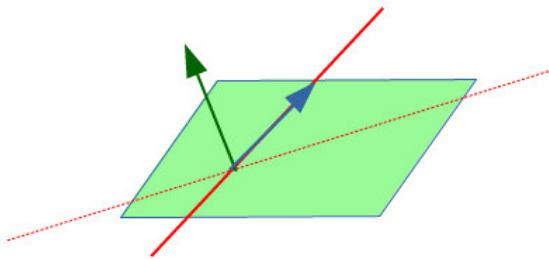
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \pi, \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-3, -1, 6], \quad k \perp \pi \Rightarrow k \parallel \vec{n}$$

$$k : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 5 - t \\ z = -3 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \pi : -3(x - 2) - (y - 1) + 6(z - 3) = 0$$

$$\pi : 3x + y - 6z + 11 = 0 \quad \{P'\} = k \cap \pi = ?$$

$$3(4 - 3t) + 5 - t - 6(-3 + 6t) = 0 \Rightarrow t = 1, \quad P' = (1, 4, 3)$$

Definicja 5.4.4. *Kątem między płaszczyzną a prostą* nazywamy kąt o mierze $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to miara kąta ostrego (lub prostego, gdy prosta i płaszczyzna są równoległe) między odpowiednio zwróconym wektorem kierunkowym prostej a wektorem normalnym płaszczyzny.



Przykład 5.4.5. Wyznacz kąt między prostą $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

a płaszczyzną $\pi : 3x + y + z + 1 = 0$.

Mamy $\vec{a} = [-1, 0, 2] \parallel l$, $\vec{n} = [3, 1, 1] \perp \pi$. Oznaczmy $\beta = \angle(\vec{n}, \vec{a})$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

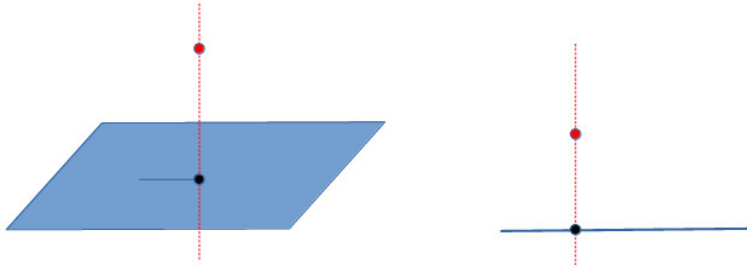
$$\text{Obliczamy } \cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|-3+0+2|}{\sqrt{9+1+1} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{55}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{55}},$$

$$\text{albo } \sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{55}}$$

Odległości

Definicja 5.4.6. i) *Odległością punktu P od płaszczyzny π* , nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na π . Oznaczamy ją $d(P, \pi)$.

ii) *Odległością punktu P od prostej l* , nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na l . Oznaczamy ją $d(P, l)$.



Wzór na odległość punktu od płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$. Wówczas

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}.$$

Istotnie, niech k będzie prostą taką, że $P_0 \in k$, $k \perp \pi$. Wówczas $k : \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$

$\{P'_0\} = k \cap \pi = ?$

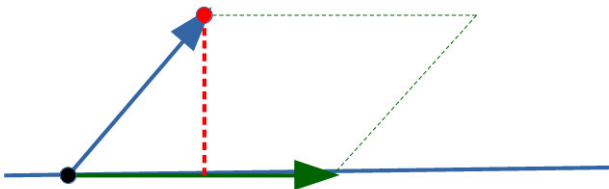
$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0, \quad t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$d(P, \pi) = |P_0 P'_0| = \sqrt{(At)^2 + (Bt)^2 + (Ct)^2} = |t| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wzór na odległość punktu od prostej

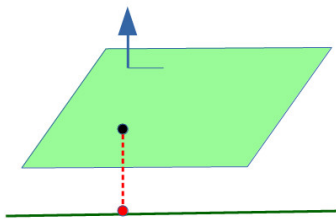
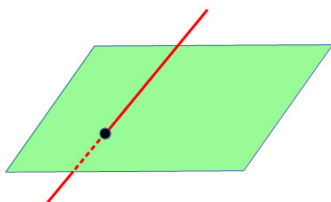
Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niech l będzie prostą przechodzącą przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym \vec{a} . Wówczas

$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$



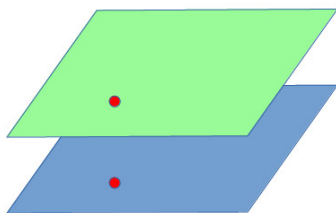
Odległość prostej od płaszczyzny

Jeśli prosta l nie przecina płaszczyzny π , to wówczas odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy odległość dowolnego punktu prostej od płaszczyzny.



Definicja 5.4.7. *Odległością dwóch płaszczyzn (prostych) równoległych nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej.*

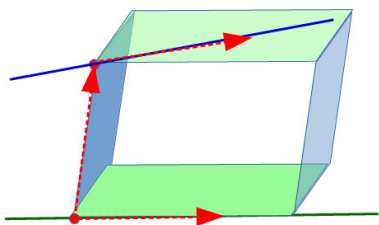
Można wykazać, że dla płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = [A, B, C] \neq \vec{0}$ zachodzi wzór $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{|\vec{n}|}$.



Definicja 5.4.8. *Odległością dwóch prostych skośnych nazywamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste.*

Niech \vec{a} będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś \vec{b} wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 . Załóżmy że proste te są skośne. Wówczas

$$d(k, l) = \frac{|(\overrightarrow{P_1 P_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$



Symetrie

Definicja 5.4.9. Niech S będzie ustalonym punktem, l ustaloną prostą oraz π ustaloną płaszczyzną.

- i) Punkt P_s jest *punktem symetrycznym* do punktu P względem punktu S , jeżeli $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP_s}$.
- ii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem prostej l , jeżeli istnieje $A \in l$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp l$.
- iii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem płaszczyzny π , jeżeli istnieje $A \in \pi$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp \pi$.

