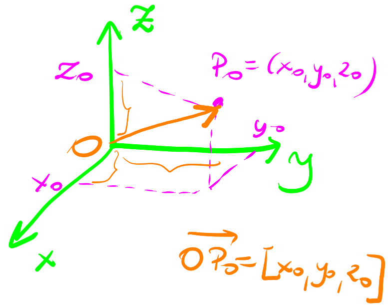
Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 5
Data: ....

TEMAT: *Geometria analityczna w* $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(x,y,z)



5.1 Wektory w przestrzeni

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z\in\mathbb{R}\}$ możemy interpretować jako:

- zbiór punktów $P=(x,y,z)$, gdzie x,y,z to współrzędne punktu
- zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $\vec{a}=\overrightarrow{OP}=[x,y,z]$, gdzie x,y,z to współrzędne wektora
- zbiór wektorów swobodnych $\vec{a}$. Wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów zaczepionych (w różnych punktach) mających ten sam zwrot, kierunek i długość.

$\vec{v}=[a,b,c]$

Oznaczamy przez $\vec{\mathbf{0}}=[0,0,0]$ wektor zerowy.

Działania na wektorach

Niech $\vec{u}=[u_x,u_y,u_z]$, $\vec{v}=[v_x,v_y,v_z]$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

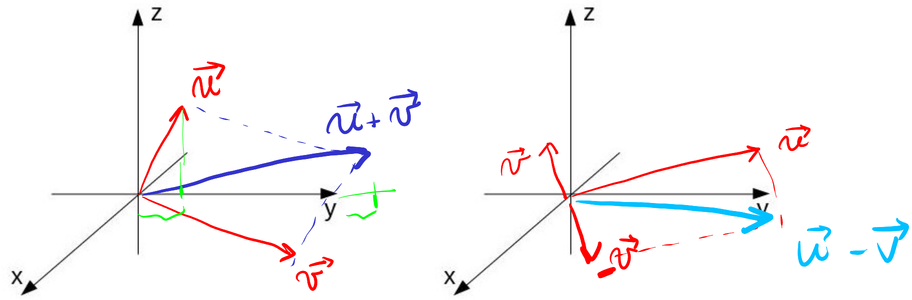
$\vec{u}+\vec{v}=[u_x+v_x,u_y+v_y,u_z+v_z]$	suma wektorów
$\lambda\cdot\vec{u}=[\lambda u_x,\lambda u_y,\lambda u_z]$	iloczyn wektora przez skalar
$-\vec{u}=[-u_x,-u_y,-u_z]$	wektor przeciwny do $\vec{u}$
$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=\vec{u}+(-1)\cdot\vec{v}$	różnica wektorów

$\vec{u}$

$\lambda=2$ $\quad 2\vec{u}$

$\lambda=-2$

$\vec{u}+(-\vec{v})=\vec{u}-\vec{v}$

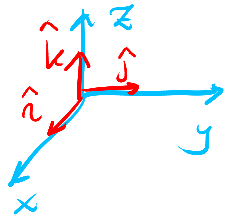


Długość wektora

Oznaczamy przez $|\vec{u}|$ długość wektora $\vec{u}$. Jeśli $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$, to wówczas

$$\overrightarrow{P_1P_2}=[x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1],\qquad |\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

$\vec{u} \sim \hat{u}$ wersor



jednostkowy

Wektor długości 1 nazywamy *wersorem.* Oznaczamy przez $\hat{\imath} = [1, 0, 0]$, $\hat{\jmath} = [0, 1, 0]$, $\hat{k} = [0, 0, 1]$ wersory osi układu współrzędnych. Wówczas zapis $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ oznacza $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$. Ponadto $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

$= u_x \cdot [1,0,0] + u_y \cdot [0,1,0] + u_z \cdot [0,0,1]$
$= [u_x,0,0] + [0,u_y,0] + [0,0,u_z]$

Własności długości: $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$, $|\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$, $|\vec{u} + \vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

nierówność trójkąta

Wersorem niezerowego wektora $\vec{u}$ nazywamy wersor o tym samym kierunku i zwrocie co $\vec{u}$. Oznaczamy go $\hat{u}$. Oczywiście $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$.

$|\vec{u}| = 5$ $\quad |\hat{u}| = 1$

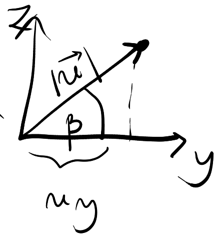
$\frac{1}{5}\vec{u}$

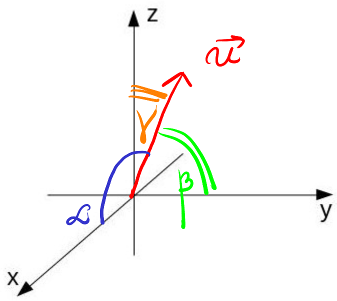
Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, to $\hat{u} = \left[\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|}\right]$ oraz

Unormować wektor

$$|\hat{u}| = \sqrt{\frac{u_x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{1}{|\vec{u}|^2}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1.$$

Jeśli wektor $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych kąty α, β, γ, odpowiednio, to kąty te nazywamy *kątami kierunkowymi,* zaś współrzędne wersora $\hat{u}$, czyli liczby $\cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|}$, $\cos\beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}$, $\cos\gamma = \frac{u_z}{|\vec{u}|}$ nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora $\vec{u}$.





$|\vec{u}| = 1$

$\cos\alpha = u_x$
$\cos\beta = u_y$
$\cos\gamma = u_z$

Iloczyn skalarny

kąt
" umowa
jego miara

Oznaczamy przez $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ kąt między wektorami $\vec{u}, \vec{v}$. Przyjmujemy, że należy on do przedziału $[0, \pi]$.

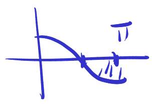
skalar liczba

Definicja 5.1.1. *Iloczynem skalarnym* dwóch niezerowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy liczbę $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$. Oznaczamy ją symbolem $\vec{u} \circ \vec{v}$. Gdy jeden z wektorów jest zerowy, przyjmujemy, że iloczyn jest równy 0.

zosobna.

Twierdzenie 5.1.2. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas $\vec{u} \circ \vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z$.

Przykład 5.1.3. $[1, 4, 0] \circ [2, -1, 1] = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -2 < 0$
Cosinus kąta między wektorami jest ujemny, zatem kąt jest rozwarty.



$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi]$ $\quad$ I lub II ćw $\quad$ II ćw

Twierdzenie 5.1.4 (Własności iloczynu skalarnego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$ z definicji $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

ii) $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$ kwadrat długości $\vec{u} \circ \vec{u} \stackrel{IW}{=} u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$

iii) $(\lambda\vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v})$

iv) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$ rozdzielność

v) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ bo $|\cos\alpha| \leq 1$

vi) $\vec{u} \neq \vec{\mathbf{0}}, \vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{u} \circ \vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} \perp \vec{v}$

$|\vec{u}| \neq 0 \quad |\vec{v}| \neq 0 \quad \vec{u} \circ \vec{v} = 0$

$\alpha \in [0, \pi] \quad \cos\alpha = 0$

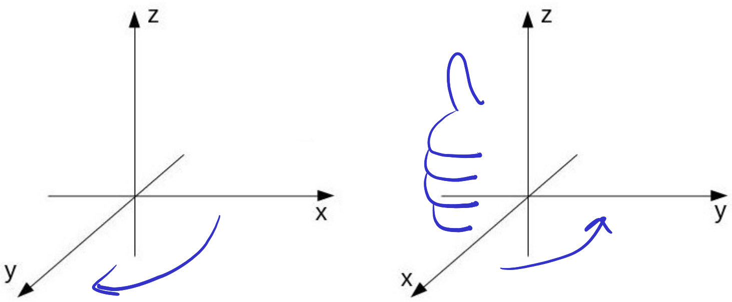
$\alpha = \frac{\pi}{2}$

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ - trójka wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w jednym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych.

układ lewoskrętny układ prawoskrętny

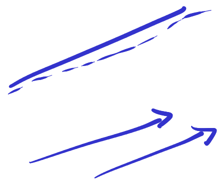


Reguła prawej dłoni

Definicja 5.1.5. Uporządkowana trójka wektorów $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ma *orientację zgodną* z orientacją układu współrzędnych, jeśli

$$\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0.$$

Iloczyn wektorowy



Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy *współliniowymi* lub *kolinearnymi*, gdy istnieje prosta, w której zawate są te wektory. Piszemy wówczas $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

równoległość

wektory swobodne

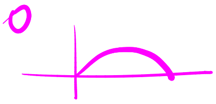
Definicja 5.1.6. *Iloczynem wektorowym* uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$ taki, że:

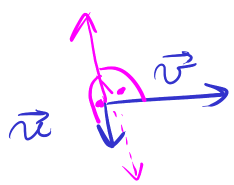
$(\vec{u}, \vec{v})$ to inna para niż $(\vec{v}, \vec{u})$

kierunek i) $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$,

długość ii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$,

$\geq 0 \quad \in [0, \pi]$

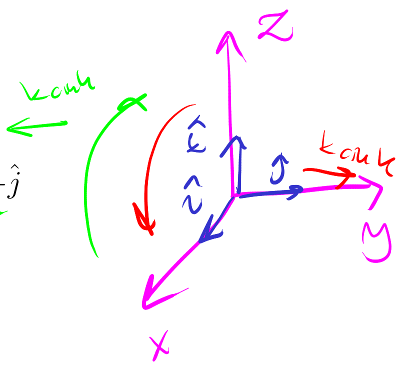




zwrot

iii) orientacja trójki $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych. RPD

Wektor $\vec{w}$ oznaczamy symbolem $\vec{u}\times\vec{v}$.
Jeśli $\vec{u}=\vec{0}$ lub $\vec{v}=\vec{0}$, to przyjmujemy $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$.



Przykład 5.1.7. $\hat{\imath}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\times\hat{k}=0$ bo kąt = 0
$\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k},\quad \hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath},\quad \hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath},\quad \hat{\jmath}\times\hat{\imath}=-\hat{k},\quad \hat{k}\times\hat{\jmath}=-\hat{\imath},\quad \hat{\imath}\times\hat{k}=-\hat{\jmath}$

Twierdzenie 5.1.8. Jeśli $\vec{u}=[u_x,u_y,u_z]$, $\vec{v}=[v_x,v_y,v_z]$, to wówczas

Reguła mnemotechniczna

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}$$

wektory

liczby

$(-1)^2\cdot\hat{\imath}\,\_\_\_ + (-1)^3\,\hat{\jmath}\,\_\_\_ + (-1)^4\cdot\hat{k}\,\_\_\_$

$\hat{\imath}\,\_\_\_ - \hat{\jmath}\,\_\_\_ + \hat{k}\,\_\_\_$

$[1,0,0]$ $[0,1,0]$ $[0,0,1]$

nie obowiązuje!

Dowód. Niech $\vec{w}=\left[\begin{vmatrix}u_y & u_z\\ v_y & v_z\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}u_x & u_z\\ v_x & v_z\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}\right]$. Uzasadnimy, że $\vec{w}$ ma ten sam kierunek, zwrot oraz długość co wektor $\vec{u}\times\vec{v}$.

Zauważmy, że $\vec{w}\perp\vec{u}$ oraz $\vec{w}\perp\vec{v}$. Istotnie $\vec{w}\circ\vec{u}=u_x\begin{vmatrix}u_y & u_z\\ v_y & v_z\end{vmatrix}-u_y\begin{vmatrix}u_x & u_z\\ v_x & v_z\end{vmatrix}+u_z\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=0$ i podobnie $\vec{w}\circ\vec{v}=0$.

Ponadto $|\vec{w}|=|\vec{u}\times\vec{v}|$, bowiem $|\vec{w}|^2=(u_yv_z-v_yu_z)^2+(u_xv_z-v_xu_z)^2+(u_xv_y-v_xu_y)^2=$
$=(u_x^2+u_y^2+u_z^2)(v_x^2+v_y^2+v_z^2)-(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-(\vec{u}\circ\vec{v})^2=$
$=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\left(1-\cos^2\measuredangle(\vec{u},\vec{v})\right)=\left(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})\right)^2$.

Jeśli $\vec{u},\vec{v}$ są niewspółliniowe, to $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})\neq 0$, skąd wynika, że $|\vec{w}|>0$.

$$\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=w_x\begin{vmatrix}u_y & u_z\\ v_y & v_z\end{vmatrix}-w_y\begin{vmatrix}u_x & u_z\\ v_x & v_z\end{vmatrix}+w_z\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=w_x^2+w_y^2+w_z^2=|\vec{w}|^2.$$

Jak zaobserwowaliśmy $|\vec{w}|^2>0$, więc trójka $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ ma orientację zgodną z orientacją układu współrzędnych. $\square$

Przykład 5.1.9. Niech $\vec{u}=[1,2,-3]$, $\vec{v}=[3,4,5]$. Korzystamy z twierdzenia Laplace'a

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\imath} & \hat{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}=\hat{\imath}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}-\hat{\jmath}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 5\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=[22,-14,-2]$$

$(-1)^2$ $(-1)^3$ $(-1)^4$

lub metody Sarrusa

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}=10\hat{\imath}+4\hat{k}-9\hat{\jmath}-6\hat{k}+12\hat{\imath}-5\hat{\jmath}=22\hat{\imath}-14\hat{\jmath}-2\hat{k}.$$

Twierdzenie 5.1.10 (Własności iloczynu wektorowego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

ii) $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$

iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$ rozdzielność

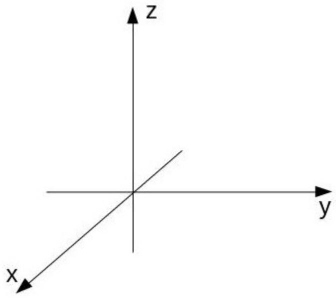
iv) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$ rozdzielność (bo × nieprzem.)

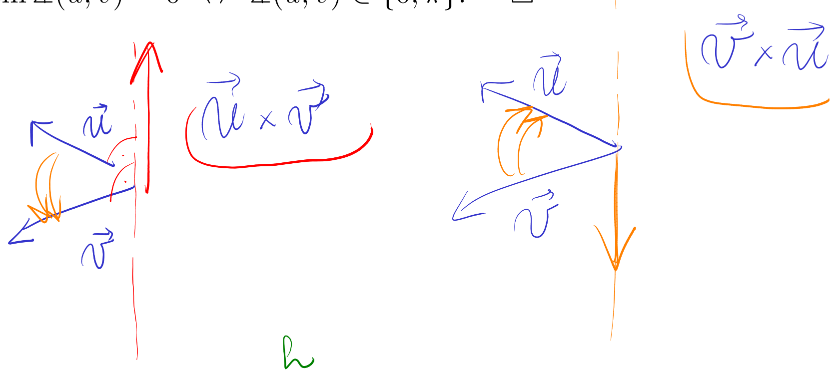
v) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ $\quad |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \underbrace{\sin\angle(\vec{u},\vec{v})}_{\leq 1}$

vi) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \big(\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{\mathbf{0}} \vee \vec{v} = \vec{\mathbf{0}}\big)$

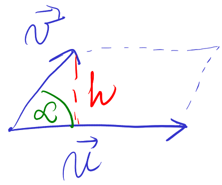
Dowód. Własności i),ii),iii),iv) wynikają z odpowiednich własności wyznaczników.
v) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
vi) Jeśli $\vec{u} \neq \vec{\mathbf{0}}, \vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$, to $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \sin\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \{0, \pi\}$. $\square$

Reguła prawej dłoni:





$P_\square = |\vec{u}| \cdot \overbrace{|\vec{v}| \cdot \sin\alpha}^{h} = |\vec{u} \times \vec{v}|$



Uwaga 5.1.11. Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}$ równe jest $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

$\sin\alpha = \frac{h}{|\vec{v}|}$

Iloczyn mieszany

Definicja 5.1.12. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$,$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. *Iloczynem mieszanym* uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy liczbę $\underbrace{(\vec{u}\times\vec{v})}_{\text{wektor}}\circ\vec{w}$. Oznaczamy ją symbolem $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

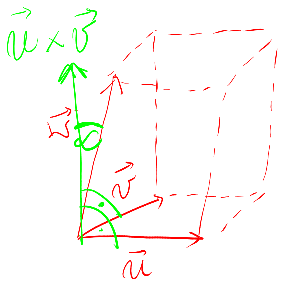
skalar

Twierdzenie 5.1.13. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$,$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Wówczas

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Dowód. $\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = w_x \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} =$

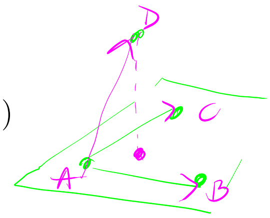
$= [w_x, w_y, w_z] \circ \left[\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\right] = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$ $\square$



Uwaga 5.1.14. Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ równa jest $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

Dowód. Niech $\alpha = \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$. Ponieważ $V = P_p \cdot \overset{h}{d} = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h$ oraz $\cos\alpha = \frac{h}{|\vec{w}|}$, zatem $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\alpha = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$. $\square$

Przykład 5.1.15. Czy punkty $A = (1,0,2), B = (5,1,5), C = (3,-1,2), D = (1,3,5)$ leżą w jednej płaszczyźnie?



Punkty leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy objętość czworościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ jest równa zero.

$\overrightarrow{AB} = [4,1,3]$, $\overrightarrow{AC} = [2,-1,0]$, $\overrightarrow{AD} = [0,3,3]$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 18 - 6 = 0$$

Punkty są współpłaszczyznowe (komplanarne).

Twierdzenie 5.1.16 (Własności iloczynu mieszanego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ prawdziwe są następujące równości.

To też może być def.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \overset{DEF}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$

$(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{v} \times \vec{w}) \circ \vec{u} = \vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w})$

i) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$

ii) $\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w})$

iii) $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}) = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}) + (\vec{v}, \vec{w}, \vec{a})$ rozdzielność

iv) $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$

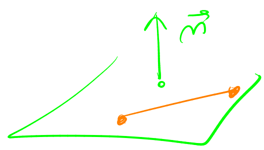
u v w −

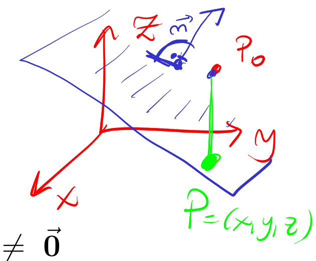
v u w +

v w u −

Dowód. i), ii), iii) Teza wynika z odpowiednich własności wyznacznika.
iv) Niech α to kąt między wektorami $\vec{u} \times \vec{v}$ oraz $\vec{w}$. Wówczas
$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot |\cos\alpha| \leq |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$. □

5.2 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$





Równanie ogólne i normalne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}\}$$

$P_0 \in \pi$, $\vec{0} = \overrightarrow{P_0P_0}$

$P \in \pi \iff \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$

jest płaszczyzną przechodząca przez punkt P_0 i prostopadłą do wektora $\vec{n}$. Wektor $\vec{n}$ nazywamy *wektorem normalnym* płaszczyzny π.

$P = (x,y,z)$ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\overrightarrow{P_0P} = [x-x_0, y-y_0, z-z_0]$

$$P \in \pi \iff \overrightarrow{P_0P} \circ \underset{[A,B,C]}{\vec{n}} = 0 \iff A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Równanie normalne:	$\pi: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
Równanie ogólne:	$\pi: Ax + By + Cz + D = 0,\ D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

$\pi \perp \vec{n} = [A, B, C]$

Przykład 5.2.1. $P_0=(1,2,5), \vec{n}=[1,-1,3]$, $P_0\in\pi$, $\vec{n}\perp\pi$, $\pi=?$

$\pi:\ 1\cdot(x-1)+(-1)\cdot(y-2)+3\cdot(z-5)=0$ równanie normalne

$\overrightarrow{P_0P}=[x-1, y-2, z-5]$

$\pi:\ x-y+3z-14=0$ równanie ogólne

Równanie parametryczne płaszczyzny

Niech $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a}=[a_x,a_y,a_z]\neq\vec{\mathbf{0}}$, $\vec{b}=[b_x,b_y,b_z]\neq\vec{\mathbf{0}}$ ustalonymi wektorami niewspółliniowymi, tj. $\vec{a}\nparallel\vec{b}$. Wówczas zbiór

2 parametry

$$\pi=\{P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \exists t,s\in\mathbb{R}\ \boxed{\overrightarrow{P_0P}=t\vec{a}+s\vec{b}}\}$$

jest płaszczyzną przechodząca przez punkt P_0 i równoległą do wektorów $\vec{a},\vec{b}$. Mówimy, że wektory $\vec{a},\vec{b}$ są *wektorami rozpinającymi* płaszczyznę π.

$\vec{u}=[u_x,u_y]$ $\quad u_x[1,0]+u_y[0,1]$ $\quad u_x\cdot\vec{i}+u_y\cdot\vec{j}$

$[ta_x+sb_x,\ ta_y+sb_y,\ ta_z+sb_z]$

$$\overrightarrow{P_0P}=t\vec{a}+s\vec{b}\Leftrightarrow[x-x_0,y-y_0,z-z_0]=t[a_x,a_y,a_z]+s[b_x,b_y,b_z]$$

Równanie parametryczne: $\quad \pi:\ \begin{cases} x=x_0+t\cdot a_x+s\cdot b_x\\ y=y_0+t\cdot a_y+s\cdot b_y\\ z=z_0+t\cdot a_z+s\cdot b_z\end{cases},\ t,s\in\mathbb{R}$

Przykład 5.2.2. Napisz równanie parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A=(1,1,4)$, $B=(2,5,4)$ i równoległej do osi Oy.

$$\overrightarrow{AB}=[1,4,0]\parallel\pi,\quad \hat{j}=[0,1,0]\parallel Oy\Rightarrow\hat{j}\parallel\pi,\quad A\in\pi$$

$$\pi:\ \begin{cases} x=1+1\cdot t+0\cdot s &=1+t\\ y=1+4\cdot t+1\cdot s &=1+4t+s\\ z=4+0\cdot t+0\cdot s &=4\end{cases},\ t,s\in\mathbb{R}$$

Inne równania płaszczyzny

1. Równanie postaci $\boxed{\pi:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,}$ *gdzie* $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, opisuje płaszczyznę przechodzącą przez punkty $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$. Jest to tzw. *równanie odcinkowe* płaszczyzny.

$\overrightarrow{AB}=[-a,b,0]$ $\quad \overrightarrow{AC}=[-a,0,c]$ $\quad A=(a,0,0)$ $\quad (0,b,0)=B$ $\quad (0,0,c)=C$

2. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_1=(x_1,y_1,z_1), P_2=(x_2,y_2,z_2), P_3=(x_3,y_3,z_3)$ ma postać

Dowód $\pi\perp\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$\vec{n}=[bc,ac,ab]$

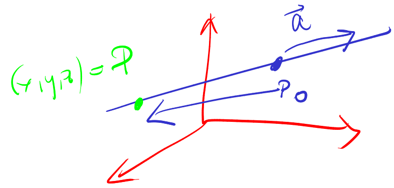
$$\pi:\ \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

równ. π: ogólne $\quad bc(x-a)+ac(y-0)+ab(z-0)=0 \quad /:abc$

$\frac{x-a}{a}+\frac{y-0}{b}+\frac{z-0}{c}=0$

Istotnie, ponieważ $\overrightarrow{P_1P_2}=[x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1]$, $\overrightarrow{P_1P_3}=[x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1]\parallel\pi$ oraz $\vec{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\perp\pi$, zatem
$\pi=\{P=(x,y,z):\ \overrightarrow{P_1P}\perp\vec{n}\}=\{P=(x,y,z):\ [x-x_1,y-y_1,z-z_1]\circ\vec{n}=0\}$.

5.3 Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$



Równanie parametryczne i kierunkowe prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{\mathbf{0}}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$l = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a}\}$$

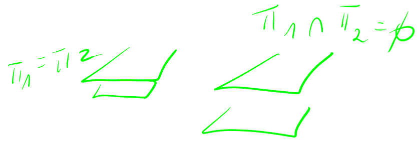
jest prostą przechodząca przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\vec{a}$. Wektor $\vec{a}$ nazywamy *wektorem kierunkowym* prostej l.

$[x-x_0, y-y_0, z-z_0] = [ta_x, ta_y, ta_z]$

$$P_0 \in l \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} \ : \ \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$

Równanie postaci $l : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ nazywamy *równaniem parametrycznym* prostej l.

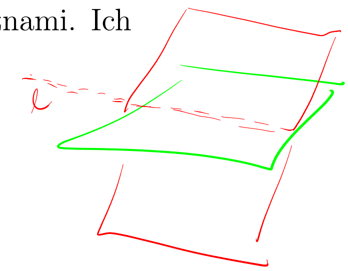
Rugując z każdego z powyższych równań parametr t otrzymujemy równanie postaci l : $t = \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$, które nazywamy *równaniem kierunkowym* prostej l.



Równanie krawędziowe prostej

$[A,B,C] \neq \vec{0}$

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, gdzie $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ będą dwiema nierównoległymi płaszczyznami. Ich częścią wspólną jest prosta $l = \pi_1 \cap \pi_2$.



$$P \in l \quad \Leftrightarrow \quad (P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2)$$

Równanie krawędziowe: $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

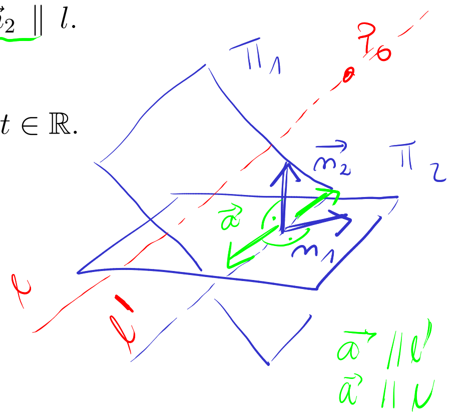
Przykład 5.3.1. Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 3, 1)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Oznaczmy $\vec{n}_1 = [6, -1, 1] \perp \pi_1$, $\vec{n}_2 = [1, 3, -2] \perp \pi_2$ oraz $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel l$.

$\Rightarrow \pi_1 \nparallel \pi_2$

$\vec{n}_1 \neq \beta \cdot \vec{n}_2$

Wówczas $\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \underbrace{[-1, 13, 19]}_{\vec{a}}$ oraz $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 13t \\ z = 1 + 19t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.



Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 8
Data: ....

TEMAT: *Geometria analityczna w* $\mathbb{R}^3$*- ciąg dalszy*

6.1 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

Wzajemne położenie płaszczyzn

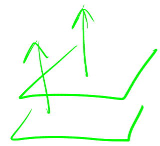
Niech $\pi_1: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n_1} = [A_1, B_1, C_1] \neq \vec{\mathbf{0}}$,
$\pi_2: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n_2} = [A_2, B_2, C_2] \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Szukanie punktów wspólnych π_1 oraz π_2 polega na rozwiązaniu układu równań $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 \\ -D_2 \end{bmatrix}.$$

$w_1 = \beta \cdot w_2$

Niech $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{bmatrix}$.



Płaszczyzny mogą być równoległe. $\quad \pi_1 \| \pi_2 \; \Leftrightarrow \; n_1 \| n_2 \; \Leftrightarrow \; \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{\mathbf{0}}$

Wówczas albo $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}}$, gdy $r(U) = r(A) = 1$ 2 parametry

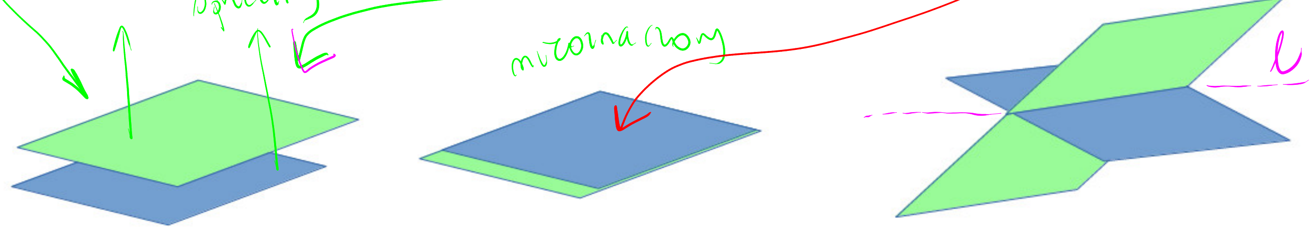
albo $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing \; \Leftrightarrow \; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = 2$, $r(A) = 1$.

$\pi_1 \| \pi_2$ Tw. Kroneckera - Capellego

Gdy $r(U) = r(A) = 2$, płaszczyzny $\pi_1 \nparallel \pi_2$ przecinają się wzdłuż prostej.
W szczególności mogą być prostopadłe.

$n = 3$ $\quad r = 2$ $\quad n - r = 1$ 1 parametr

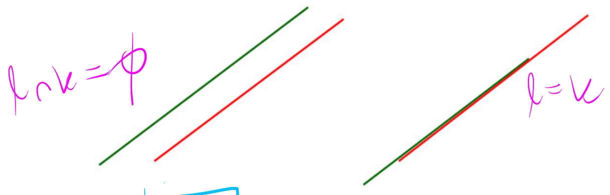
$$\pi_1 \perp \pi_1 \; \Leftrightarrow \; n_1 \perp n_2 \; \Leftrightarrow \; \vec{n_1} \circ \vec{n_2} = 0$$

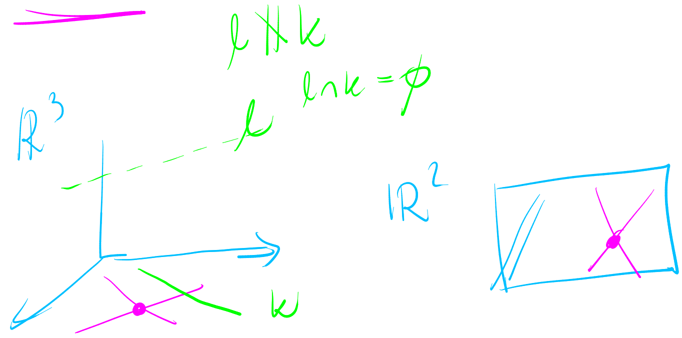


Wzajemne położenie prostych

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l, przechodzącej przez punkt P_1, zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k, przechodzącej przez punkt P_2.

Proste mogą być równoległe. $\quad l \parallel k \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{\mathbf{0}}$.
Wówczas albo $l = k$, albo $l \cap k = \varnothing$.



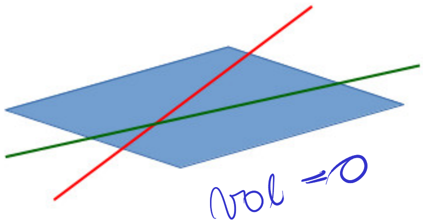


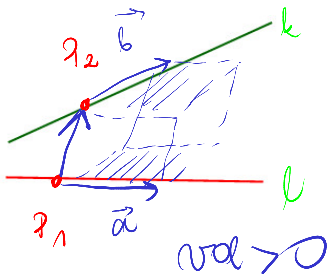
Gdy $\boxed{l \not\parallel k}$, możliwe są dwie sytuacje.

1) Proste l i k leżą w jednej płaszczyźnie, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas l i k mają jeden punkt wspólny tj. $l \cap k = \{P\}$,

2) Proste l i k nie leżą w jednej płaszczyźnie (tzw. *proste skośne*), co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas $l \cap k = \varnothing$.

Zatem proste l i k są skośne wtedy i tylko wtedy gdy $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}\right) \neq 0$.





$l \not\parallel k$
$l \cap k = \phi$
skośne

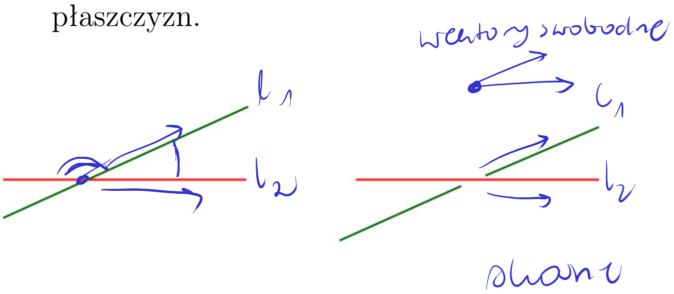
Kąty

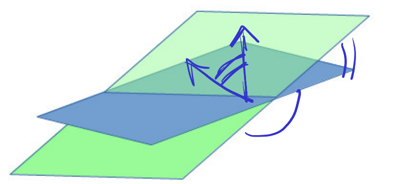
Definicja 6.1.1. i) *Kątem między dwiema prostymi* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy proste są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami kierunkowymi tychże prostych.

ii) *Kątem między dwiema płaszczyznami* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy płaszczyzny są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami normalnymi tychże płaszczyzn.

kąt (geom.)

miara kąta (liczba)

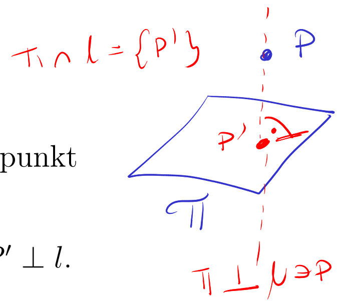




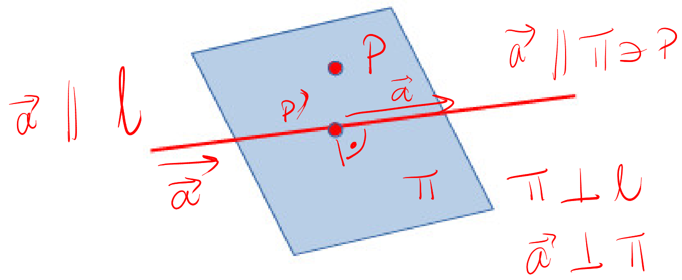
$\Pi_1 \parallel \Pi_2$

kąt zerowy

Definicja 6.1.2. i) *Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π* nazywamy punkt $P' \in \pi$ taki, że $PP' \perp \pi$.

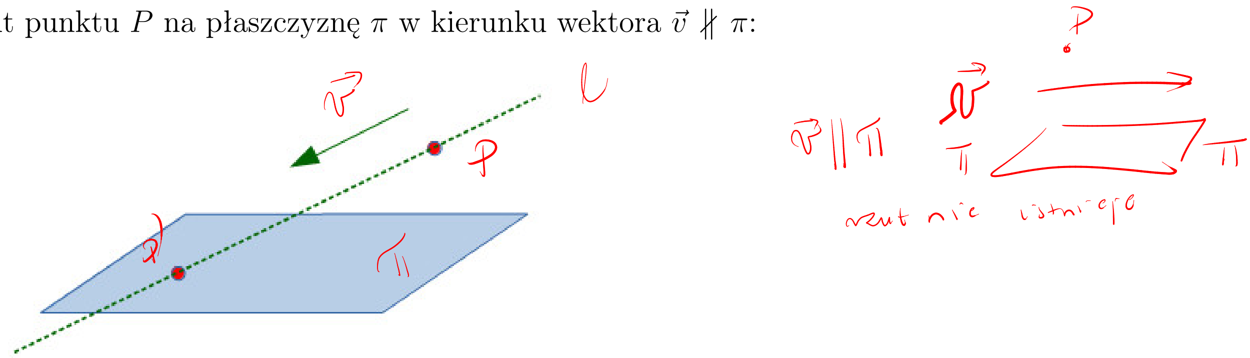


ii) *Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l* nazywamy punkt $P' \in l$ taki, że $PP' \perp l$.

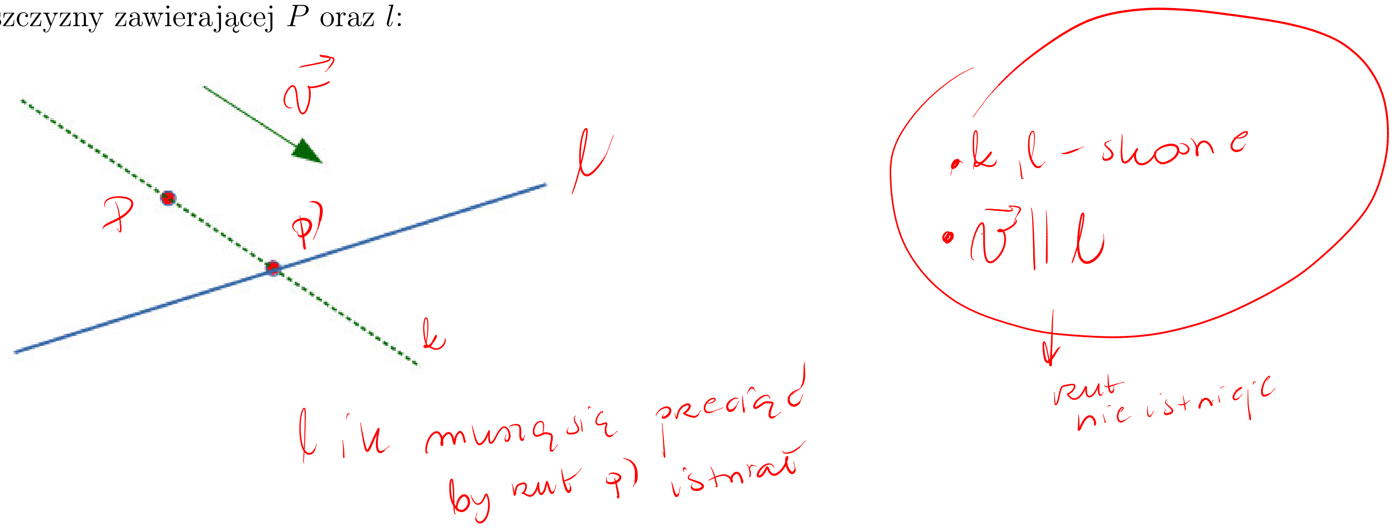


Można zdefiniować *rzut ukośny* w kierunku zadanego wektora.

Rzut punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora $\vec{v} \nparallel \pi$:



Rzut punktu P na prostą l w kierunku wektora $\vec{v}$, o którym zakładamy, że należy do płaszczyzny zawierającej P oraz l:



$P \in \pi$

$P = P'$

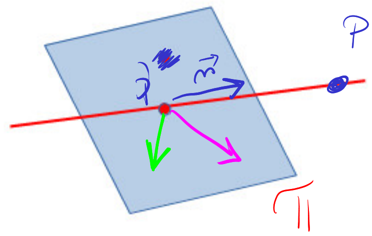
rzut

Przykład 6.1.3. Wyznacz rzut prostokątny punktu $P = (4, 5, -3)$ na płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 3 + t + s \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}.$$

$P \notin \pi$

$\pi \perp k$



$\{P'\} = \pi \cap k$

Niech k będzie prostą taką, że $k \perp \pi$, $P \in k$.

$\vec{u} = [2, 0, 1] \parallel \pi$, $\quad \vec{v} = [1, 3, 1] \parallel \pi$, $\quad A = (2, 1, 3) \in \pi$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \pi, \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-3, -1, 6], \quad k \perp \pi \Rightarrow k \parallel \vec{n}$$

P $\quad \vec{n}$

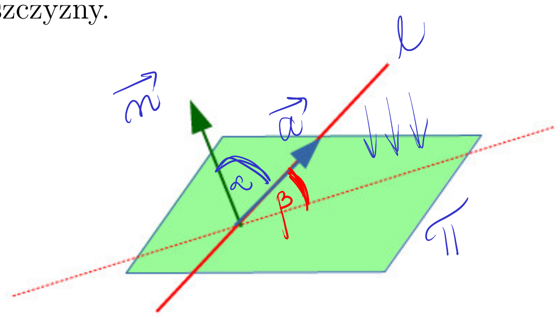
$$k : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 5 - t \\ z = -3 + 6t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \qquad \pi : -3(x-2) - (y-1) + 6(z-3) = 0$$

$\pi : 3x + y - 6z + 11 = 0 \quad \{P'\} = k \cap \pi = ?$

$3(4 - 3t) + 5 - t - 6(-3 + 6t) = 0 \Rightarrow \boxed{t = 1,} \quad P' = (1, 4, 3)$

Podst. $t = 1$

Definicja 6.1.4. *Kątem między płaszczyzną a prostą* nazywamy kąt o mierze $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to miara kąta ostrego (lub prostego, gdy prosta i płaszczyzna są równoległe) między odpowiednio zwróconym wektorem kierunkowym prostej a wektorem normalnym płaszczyzny.



l' - rzut prostokątny l na π

$\beta := \measuredangle(\pi, l)$

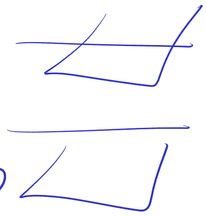
$\alpha := \measuredangle(\vec{n}, \vec{a})$

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$l \subset \pi$

$l \parallel \pi$

$l \cap \pi \neq \emptyset$



Przykład 6.1.5. Wyznacz kąt między prostą $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

a płaszczyzną $\pi : 3x + y + z + 1 = 0$.

Mamy $\vec{a} = [-1, 0, 2] \parallel l$, $\quad \vec{n} = [3, 1, 1] \perp \pi$. $\quad$ Oznaczmy $\beta = \measuredangle(\vec{n}, \vec{a})$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Obliczamy $\cos\beta = \frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|-3+0+2|}{\sqrt{9+1+1} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$, $\quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{\sqrt{55}}$,

albo $\sin\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{55}}$

$\vec{n} \circ \vec{a} = |\vec{n}| \cdot |\vec{a}| \cos\beta$

$\pi - \varphi$ $\quad \varphi$

$\cos\varphi > 0$

$\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$

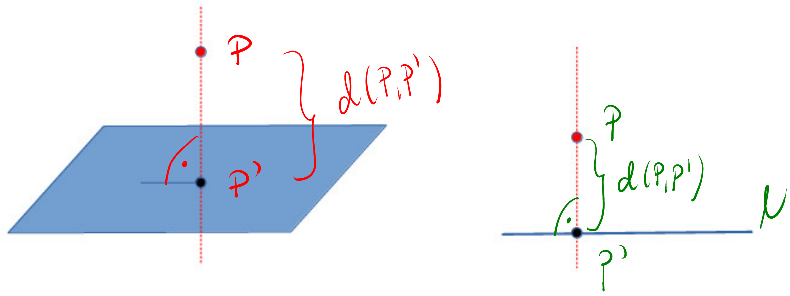
$\frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$

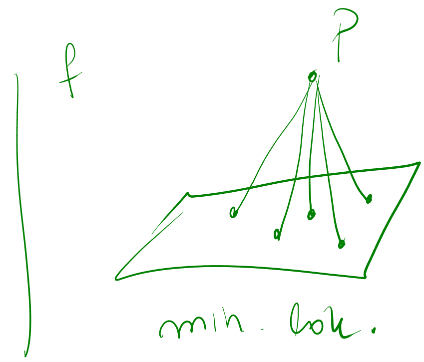
kąt ostry (I ćw) $\rightarrow$ jego cosinus dodatni

Odległości

Definicja 6.1.6. i) *Odległością punktu P od płaszczyzny π*, nazywamy długość odcinka PP', gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na π. Oznaczamy ją $d(P, \pi)$.

ii) *Odległością punktu P od prostej l*, nazywamy długość odcinka PP', gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na l. Oznaczamy ją $d(P, l)$.





Wzór na odległość punktu od płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{\mathbf{0}}$. Wówczas

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}.$$

Istotnie, niech k będzie prostą taką, że $P_0 \in k$, $k \perp \pi$. Wówczas $k: \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$

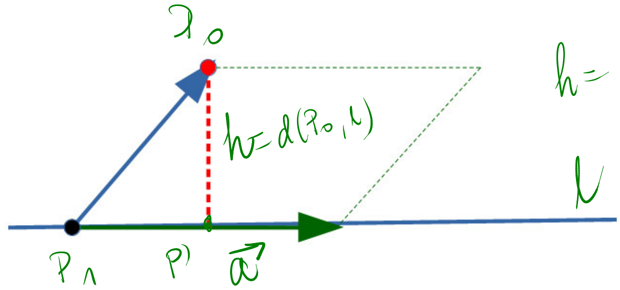
$\{P_0'\} = k \cap \pi = ?$
$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0, \quad t = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$
$d(P, \pi) = |P_0P_0'| = \sqrt{(At)^2 + (Bt)^2 + (Ct)^2} = |t|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Wzór na odległość punktu od prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niech l będzie prostą przechodząca przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym $\vec{a}$. Wówczas

$P_{\square} = |\vec{a}| \cdot h$

$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$



$h = \frac{P_{\square}}{|\vec{a}|}$

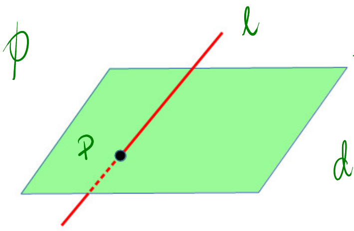
$P_1 \in l$ jakiś

$\overrightarrow{P_1P_0}$

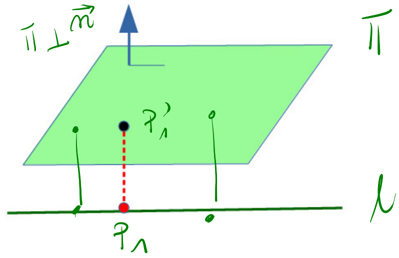
Odległość prostej od płaszczyzny

Jeśli prosta l nie przecina płaszczyzny π, to wówczas odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy odległość dowolnego punkty prostej od płaszczyzny.

$l \cap \pi \neq \emptyset = \{P\}$



$d(l, \pi) = 0$



$l \cap \pi = \emptyset$

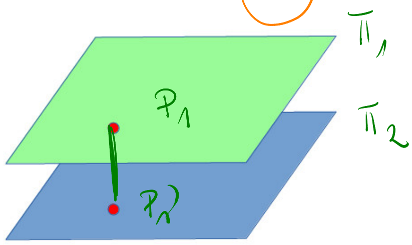
$l \parallel \pi$

$d(l, \pi) = d(P_1, \pi) = |P_1P_1'|$

Definicja 6.1.7. *Odległością dwóch płaszczyzn (prostych) równoległych* nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej.

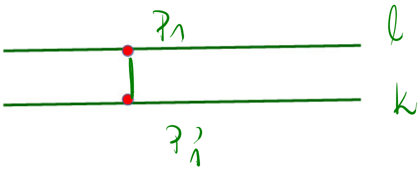
Można wykazać, że dla płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $\vec{n_2} = [A, B, C] \neq \vec{\mathbf{0}}$ zachodzi wzór $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{|\vec{n}|}$.

$\frac{A_1}{A_1}$ $D_1 \neq D_2$



$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = d(P_1, P_1') = |\overrightarrow{P_1P_1'}|$

$P_1 \in \pi_1$ dowolny

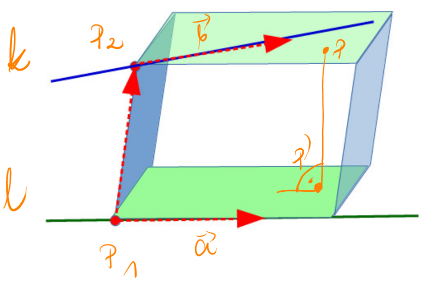


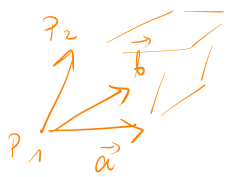
Definicja 6.1.8. *Odległością dwóch prostych skośnych* nazywamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste.

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l, przechodzącej przez punkt P_1, zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k, przechodzącej przez punkt P_2. Załóżmy że proste te są skośne. Wówczas

$$d(k, l) = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

$\frac{Obj}{P_{podst}}$





Symetrie

Definicja 6.1.9. Niech S będzie ustalonym punktem, l ustaloną prostą oraz π ustaloną płaszczyzną.

i) Punkt P_s jest *punktem symetrycznym* do punktu P względem punktu S, jeżeli $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP_s}$.

ii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem prostej l, jeżeli istnieje $A \in l$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp l$.

iii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem płaszczyzny π, jeżeli istnieje $A \in \pi$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp \pi$.