Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 9
Data: ....

TEMAT: *Przestrzenie liniowe*

7.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie

Niech $K = (K, +, \cdot)$ będzie ciałem, zaś $V \neq \varnothing$ zbiorem. Niech dane będzie działanie wewnętrzne $\oplus : V \times V \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in V$ oraz działanie zewnętrzne $\odot : K \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in V$.

Definicja 7.1.1. Zespół $V = (V, \oplus, K, \odot)$ taki, że

i) $(V, \oplus)$ jest grupą abelową,

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$

iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

iv) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$

v) $\forall v \in V \quad 1 \odot v = v$

nazywamy *przestrzenią wektorową* bądź *przestrzenią liniową* nad ciałem K (albo przestrzenią K-liniową). Elementy zbioru V nazywamy *wektorami*, zaś elementy ciała K *skalarami.*

Przykład 7.1.2. Poniższe struktury są przestrzeniami wektorowymi.

i) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \oplus, \mathbb{R}, \odot)$
Dla $u = [u_1, \dots, u_n], v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
$u \oplus v = [u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n]$, $\alpha \odot u = [\alpha u_1, \dots, \alpha u_n]$.

ii) $(K^n, \oplus, K, \odot)$, gdzie $K = (K, +, \cdot)$ to dowolne ciało
Dla $u = [u_1, \dots, u_n], v = [v_1, \dots, v_n] \in K^n$ oraz $\alpha \in K$ definiujemy
$u \oplus v = [u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n]$, $\alpha \odot u = [\alpha \cdot u_1, \dots, \alpha \cdot u_n]$.

iii) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
Dla $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
$f_3 = f_1 \oplus f_2$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R}\ f_3(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$
oraz $f_4 = \alpha \odot f_1$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R}\ f_4(x) = (\alpha \odot f_1)(x) := \alpha \cdot f_1(x)$
Elementem neutralnym działania $\oplus$ jest funkcja stale równa zero.

iv) $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = (M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie działania $+, \cdot$ to działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę.

v) $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}[x]$ to zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę.

Uwaga 7.1.3. Często tym samym symbolem oznaczamy działania w ciele $K = (K, +, \cdot)$ i działania w przestrzeni wektorowej $V = (C, +, K, \cdot)$.

Wówczas dla $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in K$

$u + v$	suma wektorów
$\alpha + \beta$	suma skalarów
$\alpha \cdot u$	iloczyn wektora przez skalar
$\alpha \cdot \beta$	iloczyn skalarów

Twierdzenie 7.1.4. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niech $\mathbf{0}$ oznacza element neutralny dodawania w V, zaś $0, 1$ elementy neutralne działań w ciele K. Wówczas:

i) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad 0 \cdot v = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \lor v = \mathbf{0})$

iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$

iv) $\forall v \in V \quad -1 \cdot v = -v$

v) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$

vi) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (u - v) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$

Dowód. Niech $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in K$ będą dowolne.
i) Ponieważ $\mathbf{0} + 0 \cdot v = 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = (0 \cdot v) + (0 \cdot v)$, zatem $\mathbf{0} = 0 \cdot v$.
Ponadto $\mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = (\alpha \cdot \mathbf{0}) + (\alpha \cdot \mathbf{0})$, zatem $\mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0}$.
ii) Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Załóżmy, że $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ oraz $\alpha \neq 0$. Ponieważ $\alpha \neq 0$, zatem istnieje $\alpha^{-1} \neq 0$. Mamy $v = 1 \cdot v = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot v = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot v) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Zatem $v = \mathbf{0}$.
iii) Na mocy i) mamy $(-\alpha) \cdot v + \alpha \cdot v = (-\alpha + \alpha) \cdot v = 0 \cdot v = \mathbf{0}$. Stąd $(-\alpha) \cdot v = -(\alpha \cdot v)$.
iv) Na mocy iii) mamy $-1 \cdot v = 1 \cdot (-v) = -(1 \cdot v) = -v$.
v) Na mocy iii) mamy $(\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha + (-\beta)) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$.
vi) Na mocy iii) mamy $\alpha \cdot (u - v) = \alpha \cdot (u + (-v)) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$. $\square$

Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K = (K, +, \cdot)$ i niech $U \subset V$ będzie niepustym podzbiorem zbioru V.

Definicja 7.1.5. Jeśli zbiór U wraz z działaniami
$\oplus|_{U \times U} : U \times U \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in U$, $\odot|_{K \times U} : K \times U \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in U$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K, to $U = (U, \oplus|_{U \times U}, K, \odot|_{K \times U})$ nazywamy *podprzestrzenią wektorową* lub *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V.

Twierdzenie 7.1.6. Jeśli $V = (V, \oplus, K, \odot)$ jest przestrzenią wektorową oraz $\varnothing \neq U \subset V$, to wówczas U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \land \alpha \odot u_1 \in U$$

lub równoważnie

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \odot u_1) \oplus (\beta \odot u_2) \in U.$$

Dowód. Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Implikacja w druga stronę wynika z faktu, że U jest podgrupą grupy V. $\square$

Uwaga 7.1.7. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową. Wówczas $U = \{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią liniową. Nazywamy ją *podprzestrzenią trywialną*. Podobnie $U = V$ jest podprzestrzenią liniową V. Podprzestrzenie te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi*.

Uwaga 7.1.8. Każda podprzestrzeń liniowa zawiera wektor zerowy.

Dowód. Jeśli U jest podprzestrzenią liniową, to $\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \land \alpha \odot u_1 \in U$. W szczególności $-1 \odot u_1 = -u_1 \in U$ oraz $u_1 \oplus (-u_1) = \mathbf{0} \in U$. $\square$

Wniosek 7.1.9. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową, zaś $U \subset V$ podzbiorem V. Jeśli $\mathbf{0} \notin U$, to U nie jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

Przykład 7.1.10.

i) $V = (\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

U jest podprzestrzenią liniową V, bowiem suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą oraz iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę jest funkcja ciągłą.

ii) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \; - \; \textit{parzysty}\}$

U **nie** jest podprzestrzenią liniową V. Niech $f(x) = x^4 + x^3$ oraz $g(x) = -x^4$. Wówczas $(f + g)(x) = x^3$. Zatem $f, g \in U$, ale $f + g \notin U$.

iii) $V = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; 2x + z - 3t = 0 \land y = 0\}$

U jest podprzestrzenią liniową V. Skoro $z = 3t - 2x$ oraz $y = 0$, zatem dowolny element $u \in U$ jest postaci $u = (x, 0, 3t - 2x, t)$. Weźmy $u_1 = (x_1, 0, 3t_1 - 2x_1, t_1) \in U$, $u_2 = (x_2, 0, 3t_2 - 2x_2, t_2) \in U$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, wówczas
$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, 0, 3(t_1 + t_2) - 2(x_1 + x_2), t_1 + t_2) \in U$
oraz $\alpha u_1 = (\alpha x_1, 0, \alpha(3t_1 - 2x_1), \alpha t_1) = (\alpha x_1, 0, 3\alpha t_1 - 2\alpha x_1, \alpha t_1) \in U$

iv) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \mathbb{R}_n[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] : \; \deg p \leq n\}$.
Przyjmujemy, że $\deg \mathbf{0} = -\infty$. Wówczas U jest podprzestrzenią liniową V.

Podprzestrzenie wektorowe $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Jedynymi nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^2$ są proste przechodzące przez $(0, 0)$.
Jedynymi nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^3$ są płaszczyzny i proste przechodzące przez $(0, 0)$.

7.2 Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in K$, $v_1, \ldots, v_m \in V$. Niech $W \neq \varnothing$ będzie podzbiorem zbioru V.

Definicja 7.2.1. i) Wektor $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \in V$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $v_1, \ldots, v_m \in V$ o współczynnikach $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in K$.

ii) Jeśli $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$, mówimy, że jest to *kombinacja zerowa.*

iii) Kombinację liniową $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$ nazywamy *kombinacją trywialną* wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$.

iv) Zbiór $\{v = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_k w_k \,:\, \alpha_1, \ldots \alpha_k \in K;\ w_1, \ldots, w_k \in W;\ k \in \mathbb{N}\}$, będący zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych układów wektorów w zbiorze W, nazywamy *powłoką liniową* zbioru W i oznaczamy symbolem $\mathrm{lin}_K W$ lub krótko $\mathrm{lin} W$.

Gdy W jest zbiorem skończonym $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ piszemy też $\mathrm{lin}\{w_1, \ldots, w_m\}$. Czyli $\mathrm{lin}\{w_1, \ldots, w_m\} = \{\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_m w_m : \alpha_1, \ldots \alpha_m \in K\}$.

Twierdzenie 7.2.2. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $\varnothing \neq W \subset V$. Wówczas zbiór $\mathrm{lin} W$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Jest to najmniejsza (w sensie relacji inkluzji) podprzestrzeń V zawierająca zbiór W.

Dowód. Suma kombinacji liniowych elementów W jest kombinacją liniową elementów W. Podobnie iloczyn kombinacji liniowej elementów W przez skalar jest kombinacją liniową elementów W. $\square$

Wniosek 7.2.3. Jeśli $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$, dla pewnych $v_1, \ldots, v_m \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ oraz $\lambda_1 \neq 0$, to wówczas $\mathrm{lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \mathrm{lin}\{u, v_2, \ldots, v_m\}$

Dowód. Inkluzja $\mathrm{lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \supseteq \mathrm{lin}\{u, v_2, \ldots, v_m\}$ wynika z faktu, że u jest kombinacją liniową $v_1, \ldots, v_m$. Jeśli $\lambda_1 \neq 0$, to wówczas $v_1 = -\frac{1}{\lambda_1} u - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} v_m$, zatem $\mathrm{lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq \mathrm{lin}\{u, v_2, \ldots, v_m\}$. $\square$

Definicja 7.2.4. Elementy zbioru W nazywamy *generatorami* przestrzeni $\mathrm{lin} W$, zaś podprzestrzeń $\mathrm{lin} W$ nazywamy podprzestrzenią *generowaną* przez zbiór W.

Przykład 7.2.5. Wersory $\hat{\imath} = (1, 0)$ oraz $\hat{\jmath} = (0, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^2$, bowiem dla dowolnego $\vec{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\vec{u} = u_x(1, 0) + u_y(0, 1) = u_x \hat{\imath} + u_y \hat{\jmath}$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.

Definicja 7.2.6. Wektory $v_1, \ldots, v_m \in V$ nazywamy *liniowo niezależnymi* lub mówimy, że tworzą *układ liniowo niezależny*, gdy każda kombinacja zerowa jest trywialna, to znaczy jeśli dla dowolnych skalarów $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ zachodzi

$$\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m = \mathbf{0} \Rightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_m = 0.$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne, nazywamy *liniowo zależnymi.*

Twierdzenie 7.2.7. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Wektory $v_1, \ldots, v_m \in V$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód. Załóżmy, że wektory $v_1, \ldots, v_m$ są liniowo zależne, czyli istnieją $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in K$ nie wszystkie równe zeru, takie że $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$. Bez straty dla ogólności możemy założyć, że $\alpha_1 \neq 0$. Wówczas $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$.
Załóżmy teraz, że v_1 jest kombinacja liniową $v_2, \ldots, v_m$, czyli istnieją $\beta_2, \ldots \beta_m \in K$ takie, że $v_1 = \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_m v_m$. Wówczas $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_m v_m = 0$, gdzie $\beta_1 = -1 \neq 0$.
□

Twierdzenie 7.2.8. Wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A, której kolejne wiersze to współrzędne wektorów $v_1, \ldots, v_k$, jest równy n.

Dowód. Wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$, gdy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ układ $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$, w którym niewiadomymi są $\alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}$, ma jedyne rozwiązanie. □

Wniosek 7.2.9. Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$, to $k \geq n$.

Przykład 7.2.10. Czy wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$?

Sprawdzamy, czy dla dowolnego $b = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takie, że $b = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

$(x, y, z) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(2, 10) + \gamma(5, 2, 2) = (\alpha + 2\beta + 5\gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, -\alpha + 2\gamma)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Wektory generują $\mathbb{R}^3$, jeśli powyższy układ jest oznaczony.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ -1 & 0 & 2 & z \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & -1 & -3 & y-x \\ 0 & 2 & 7 & z+x \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot w_2]{w_3+2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & 1 & 3 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & -x+2y+z \end{array}\right]$$

Układ oznaczony, posiada rozwiązanie $\gamma = -x + 2y + z$, $\beta = x - y - 3\gamma = 4x - 7y - 3z$, $\alpha = x - 2\beta - 5\gamma = -2x + 4y + z$. Zatem układ wektorów u, v, w generuje $\mathbb{R}^3$.

Przykład 7.2.11. Czy układ $\{A, B, C\}$ jest układem liniowo niezależnym?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Sprawdzamy, czy dowolna kombinacja zerowa jest trywialna.
Niech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ będą dowolne takie, że $\alpha A + \beta B + \gamma C = \mathbf{0}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Stąd $\begin{bmatrix} \alpha - \beta & -\alpha \\ 0 & \alpha + \beta + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \alpha = 0 \\ \gamma = -\alpha - \beta = 0 \end{cases}$

Zatem macierze A, B, C tworzą układ liniowo niezależny.

Przykład 7.2.12. Czy wektory $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 2, 0, -1)$, $w = (0, 1, 3, 1) \in \mathbb{R}^4$ są liniowo niezależne?

Niech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ będą dowolne takie, że $\alpha u + \beta v + \gamma w = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$.
Stąd $(\alpha + \beta, 2\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + 3\gamma, 4\alpha - \beta + \gamma) = (0, 0, 0, 0)$.
Wektory u, v, w będą liniowo niezależne, gdy powyższy układ jednorodny ma jedyne rozwiązanie $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3 - 3w_1 \\ w_4 - 4w_1}]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{5}w_4]{-\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow\ r(U) = r(A) = n = 3$
Na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego układ jest oznaczony. Zatem wektory u, v, w są liniowo niezależne.

Obserwacja: Badanie liniowej niezależności wektorów w $\mathbb{R}^n$ polega na wyliczaniu rzędu macierzy, której kolumnami są podane wektory. Wektory są liniowo niezależne, gdy rząd macierzy równy jest liczbie wektorów.

Wniosek 7.2.13. Niech $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Jeśli $k > n$, to wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo zależne. Równoważnie, jeśli wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne, to $k \leq n$.

Twierdzenie 7.2.14. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

i) Układ $\{v\}$, $v \in V$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $v = \mathbf{0}$.

ii) Układ wektorów zawierający podukład liniowo zależny jest liniowo zależny.

iii) Jeśli układ wektorów jest liniowo niezależny, to każdy jego podukład jest liniowo niezależny.

iv) Układ wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.

Dowód. i) Jeśli $v = \mathbf{0}$, to $1 \cdot v = \mathbf{0}$, a zatem układ $\{v\}$ jest liniowo zależny. Jeśli $\lambda v = \mathbf{0}$, $\lambda \in K \setminus \{0\}$, to wówczas $v = \mathbf{0}$ na mocy twierdzenia 7.1.4, ii).
ii) Załóżmy, że układ wektorów $\{u_1, \ldots, u_m\}$ jest liniowo zależny. Zatem istnieją $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, nie wszystkie równe zeru takie, że $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m = \mathbf{0}$. Bez straty dla ogólności możemy założyć, że $\lambda_1 \neq 0$. Dołączamy do układu dowolny inny wektor $v \in V$. Rozpatrzmy kombinację zerową $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m + \alpha v = \mathbf{0}$, gdzie $\alpha \in K$ jest dowolne. Jeśli $v = \mathbf{0}$, to $\alpha v = \mathbf{0}$ dla dowolnego α, zaś jeśli $v \neq \mathbf{0}$, to $\alpha = 0$. W każdym przypadku kombinacja jest nietrywialna, bowiem $\lambda_1 \neq 0$.
iii) Teza wynika z podpunktu ii) na mocy prawa kontrapozycji.
iv) Niech $u_1, \ldots, u_m \in V$. Załóżmy, że $u_k = \mathbf{0}$ dla pewnego $k \in \{1, \ldots, m\}$. Układ wektorów jest liniowo zależmy, bowiem istnieje nietrywialna kombinacja zerowa postaci $0 \cdot u_1 + \ldots + 0 \cdot u_{k-1} + 1 \cdot u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \ldots + 0 \cdot u_m = 0$. □

Definicja 7.2.15. Niech $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Macierz $W(x)$ postaci

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \ldots & & \ldots & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą Wrońskiego* układu funkcji $f_1, \ldots, f_n$, a jej wyznacznik *wrońskianem.*

Twierdzenie 7.2.16. Niech $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Jeśli wrońskian układu funkcji $f_1, \ldots, f_n$ nie zeruje się tożsamościowo na $\mathbb{R}$, tzn. $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \det W_{f_1,\ldots,f_n}(x_0) \neq 0$, to funkcje $f_1, \ldots, f_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $f_1, \ldots, f_n$ są liniowo zależne. Wówczas istnieją $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy $\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x) = 0$. Różniczkując równanie stronami $n-1$ razy otrzymujemy układ równań
$\begin{bmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ & \ldots & \\ f_1^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Ponieważ $f_1, \ldots, f_n$ są liniowo zależne, zatem wyznacznik główny układu jest równy zero. □

Przykład 7.2.17. Zbadaj, czy funkcje $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ tworzą układ liniowo niezależny w $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

$$\det W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 \neq 0$$

Tak, tworzą układ liniowo niezależny.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $b_1, \ldots, b_n \in V$.

Definicja 7.2.18. Układ wektorów $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ nazywamy *bazą* przestrzeni V jeśli jest on liniowo niezależny oraz $V = \text{lin}\{b_1, \ldots, b_n\}$.

Uwaga 7.2.19. Baza przestrzeni wektorowej jest maksymalnym (w sensie relacji inkluzji) układem liniowo niezależnym w tej przestrzeni.

Dowód. Jeśli $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ jest bazą przestrzeni V, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieją $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ takie, że $v = \lambda_1 b_1 \ldots + \lambda_n b_n$. Zatem układ $\{v, b_1, \ldots, b_n\}$ jest liniowo zależny.
Jeśli $\{b_1, \ldots, b_n\}$ to maksymalny układ liniowo niezależny, to dla dowolnego $u \in V$ układ $\{u, b_1, \ldots, b_n\}$ jest liniowo zależny. Zatem istnieje nietrywialna kombinacja zerowa $\lambda_0 u + \lambda_1 b_1 \ldots + \lambda_n b_n = 0$, gdzie $\lambda_0 \neq 0$ (bo inaczej byłoby $\lambda_1 b_1 \ldots + \lambda_n b_n = 0$). Stąd $u = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} b_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} b_n = 0$, czyli dowolny wektor $u \in V$ jest kombinacją liniową wektorów $b_1, \ldots, b_n$. Zatem $V = \text{lin}\{b_1, \ldots, b_n\}$. $\square$

Przykład 7.2.20. Baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Układ wektorów $\{e_1, \ldots, e_n\}$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

Wniosek 7.2.21. Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to wówczas $k = n$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy wniosków 7.2.9 oraz 7.2.13. $\square$

Przykład 7.2.22. Wskaż bazę podprzestrzeni U przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeśli
$U = \text{lin}\{(1, 3, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 2, 1), (3, 4, 1, 3)\}$.

Podane generatory na pewno nie tworzą bazy U, gdyż układ 5 wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest liniowo zależny.

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \leq 4 \neq 5$$

$$r\begin{bmatrix}1&1&1&1&3\\3&2&1&2&4\\2&1&0&2&1\\1&1&1&1&3\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\1&2&1&1\\1&1&0&1\\1&2&2&1\\3&4&1&3\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-1&-1&0\\0&-2&-2&0\\0&-1&0&0\\0&-5&-5&0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-1&-1&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}=$$

$3 \Rightarrow U = \mathrm{lin}\{(1,3,2,1),(0,-1,-1,0),(0,-1,0,0)\}$
Układ wektorów $(1,3,2,1),(0,-1,-1,0),(0,-1,0,0)$ jest bazą przestrzeni U (porównaj wniosek 7.2.3).

Twierdzenie 7.2.23. i) Każda przestrzeń wektorowa różna od $\{\mathbf{0}\}$ posiada bazę.

ii) Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej skończenie wymiarowej są równoliczne. Jeśli baza danej przestrzeni liniowej jest nieskończona, to każda inna jej baza także jest nieskończona.

iii) Każdy układ wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej może być uzupełniony do jej bazy.

Bez dowodu. Dowód można znaleźć w [4].

Definicja 7.2.24. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$ nazywamy *wymiarem przestrzeni wektorowej* V i oznaczamy $\dim_K V$ lub krótko $\dim V$. Mówimy wówczas, że przestrzeń V jest *n-wymiarowa*. Jeśli żaden skończony układ wektorów nie tworzy bazy przestrzeni V, to przyjmujemy $\dim V = \infty$. Ponadto przyjmujemy $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Wniosek 7.2.25. i) W przestrzeni liniowej n-wymiarowej każdy układ m wektorów, gdzie $m > n$ jest liniowo zależny.

ii) W przestrzeni liniowej n-wymiarowej każdy układ n wektorów liniowo niezależnych stanowi bazę tej przestrzeni.

iii) W przestrzeni liniowej n-wymiarowej każde n wektorów generujących tę przestrzeń stanowi jej bazę.

Dowód. i) Teza wynika z uwagi 7.2.19.
ii) Wykażemy, że taki układ wektorów generuje przestrzeń. Niech V będzie rozważaną przestrzenią, zaś $v_1, \ldots, v_n \in V$ układem liniowo niezależnym. Na mocy i) dla dowolnego wektora $u \in V$ układ $\{u, v_1, \ldots, v_n\}$ jest liniowo zależny. Na mocy twierdzenia 7.2.25 otrzymujemy, że u jest kombinacją liniową wektorów $v_1, \ldots, v_n$.
iii) Wykażemy, że taki układ wektorów jest liniowo niezależny. Spośród generatorów można wybrać bazę. Ponieważ wszystkie bazy są n-elementowe, zatem cały układ generatorów stanowi bazę V. $\square$

Przykład 7.2.10 - raz jeszcze
Wiemy, że wektory $u = (1,1,-1)$, $v = (2,1,0)$, $w = (5,2,2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponadto $\dim\mathbb{R}^3 = 3$, zatem układ $\{u, v, w\}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$.

Wniosek 7.2.26. Wektory $v_1 = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}), v_2 = (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}), \ldots, v_n = (v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn})$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wtedy i tylko wtedy gdy $\det[v_{ij}] \neq 0$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy twierdzeń 7.2.8 oraz 7.2.25 iii). $\square$

Wniosek 7.2.27. i) Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dwa dowolne wektory niewspółliniowe tworzą jej bazę.

ii) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ trzy dowolne wektory niewspółpłaszczyznowe tworzą jej bazę.

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ jej bazą.

Definicja 7.2.28. Uporządkowany ciąg wektorów bazowych $(b_1, \ldots, b_n)$ nazywamy *reperem bazowym* lub *bazą uporządkowaną*.

Często mówimy po prostu o *bazie*, zaznaczając w zapisie uporządkowanie wektorów bazowych, np. poprzez ich ponumerowanie.

Bazy standardowe (kanoniczne) wybranych przestrzeni liniowych

1) $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B}_k^n = \Big(e_1, \ldots, e_n\Big), \text{ gdzie } e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

2) $(\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B}_k^n = \Big(1, x, x^2, x^3, \ldots\Big), \quad \dim \mathbb{R}[x] = \infty, \quad p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_s \cdot x^s$$

3) $(\mathbb{R}_n[x], +, \mathbb{R}, \cdot), \quad \mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n\}$

$$\mathcal{B}_k^n = \Big(1, x, x^2, \ldots, x^n\Big), \quad \dim \mathbb{R}[x] = n + 1$$

dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_n[x]$ mamy $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$.

4) $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B}_k^n = \Big(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{mn}\Big), \text{ gdzie } E_{kl} = [e_{ij}^{kl}], \text{ zaś } e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & (i,j) = (k,l) \\ 0 & (i,j) \neq (kl) \end{cases}$$

$\dim M_{m\times n}(K) = m \cdot n$

Przykład 7.2.29. Bazą $M_2(\mathbb{R})$ jest układ $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, gdzie

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla dowolnej macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$.

Twierdzenie 7.2.30. Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś W jej podprzestrzenią. Wówczas

i) $W \neq V \Rightarrow \dim W < \dim V$,

ii) $\dim W = \dim V < \infty \Rightarrow W = V$.

Dowód. i) Niech $\{b_1, \ldots, b_m\}$ będzie bazą W oraz niech $v \in V \setminus W$. Ponieważ v nie jest kombinacją liniową $b_1, \ldots, b_m$, zatem układ $\{v, b_1, \ldots, b_m\}$ jest liniowo niezależny. Układ ten można uzupełnić do bazy przestrzeni V, która będzie miała co najmniej $m+1$ elementów.
ii) Teza wynika z i) na mocy prawa kontrapozycji. □

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ jej bazą uporządkowaną. Wówczas dla każdego $v \in V$ istnieją skalary $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$. Można uzasadnić, że przy ustalonym reperze bazowym skalary $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 7.2.31. Skalary $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$ nazywamy *współrzędnymi* wektora v w bazie $\mathcal{B}$. Piszemy wówczas $v = [\alpha_1, \ldots \alpha_n]_{\mathcal{B}}$.

Przykład 7.2.32. $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,
$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4,2,1), b'_2 = (-5,2,3), b'_3 = (1,3,0)$

Skalary $4, 2, 1$ to współrzędne b'_1 w bazie kanonicznej.
UMOWA: Piszemy $b'_1 = (4,2,1)$ zamiast $b'_1 = [4,2,1]_{\mathcal{B}_k^3}$.
Ponadto $b'_1 = [1,0,0]_{\mathcal{B}'}$.

Niech $v = (-3, 15, 7) \in \mathbb{R}^3$. Wyznaczymy współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}'$.
Niech $v = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}'}$, tzn. $v = \alpha b'_1 + \beta b'_2 + \gamma b'_3$. Otrzymujemy
$(-3, 15, 7) = \alpha(4,2,1) + \beta(-5,2,3) + \gamma(1,3,0) = (4\alpha - 5\beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 3\beta)$.
Aby wyznaczyć współrzędne α, β, γ, należy rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 4w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array}\right] \xrightarrow{-4 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -11 & -35 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \leftrightarrow w_2]{-1 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - 16w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & -188 & -564 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{188} \cdot w_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 11w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow v = [1,2,3]_{\mathcal{B}'}$$

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ jej dwiema bazami. Wówczas istnieją skalary $\alpha_{ij} \in K$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że

$$\begin{array}{l} b_1' = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \ldots + \alpha_{n1}b_n \\ b_2' = \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \ldots + \alpha_{n2}b_n \\ \ldots \\ b_n' = \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \ldots + \alpha_{nn}b_n \end{array}.$$

Definicja 7.2.33. Macierz $P \in M_n(K)$ postaci

$$P = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą przejścia* od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$. Oznaczamy ją symbolem $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Macierz przejścia $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ zawsze jest <u>nieosobliwa</u>. Wynika to z faktu, że wektory bazy $\mathcal{B}'$ są liniowo niezależne.

Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b_1', \dots, b_n')$ jej dwiema bazami. Niech $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Twierdzenie 7.2.34. Niech $v \in V$, $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}} = [x_1', \dots, x_n']_{\mathcal{B}'}$. Wówczas $X = PX'$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$.

Dowód. Przyjmijmy, że zapis $[w_1\, w_2\, \dots\, w_n]$ oznacza macierz, która w kolumnach ma współrzędne wektorów $w_1, w_2, \dots, w_n$. Wektory b_i, b_i' oznaczają tutaj i-te kolumny macierzy. Wówczas $[b_1'\, b_2'\, \dots\, b_n'] = [b_1\, b_2\, \dots\, b_n]P$. Macierz P jest nieosobliwa, zatem istnieje P^{-1}. Ponieważ $I = P \cdot P^{-1}$ i mnożenie macierzy jest łączne, zatem

$$v = x_1b_1 + \ldots x_nb_n = [b_1\, b_2\, \dots\, b_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [b_1\, b_2\, \dots\, b_n](P \cdot P^{-1}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= ([b_1\, b_2\, \dots\, b_n]P) \cdot \left(P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = [b_1'\, b_2'\, \dots\, b_n'] \cdot \left(P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right).$$

Ponadto $x'_1 b'_1 + \ldots x'_n b'_n = [b'_1\, b'_2\, \ldots\, b'_n] \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$. Ponieważ współrzędne wektora w bazie

są wyznaczone jednoznacznie, zatem $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. $\square$

Przykład 7.2.32 - ciąg dalszy
$\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,
$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4, 2, 1), b'_2 = (-5, 2, 3), b'_3 = (1, 3, 0)$

Wyznaczymy współrzędne wektora $v = (-3, 15, 7)$ w bazie $\mathcal{B}'$.
$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $X' = P^{-1}X = ?$.
Wyznaczamy macierz $P^{-1} = \frac{1}{47} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix}$ i obliczamy
$X' = \frac{1}{47} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Przykład 7.2.35. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ oraz jej dwie bazy
$\mathcal{B} = (1 + x, x + x^2, 1 + x^2)$, $\mathcal{B}' = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$. Wyznaczmy macierz $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

$1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]_{\mathcal{B}} = \alpha_1(1+x) + \beta_1(x+x^2) + \gamma_1(1+x^2) = (\alpha_1+\gamma_1) + (\alpha_1+\beta_1)x + (\beta_1+\gamma_1)x^2$
Stąd $\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 0 \end{cases}$ i ostatecznie $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}$.
Łatwo zauważyć, że $1 + x = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]_{\mathcal{B}} = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}}$.
Analogicznie obliczenia przeprowadzamy dla $1 + x + x^2 = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]_{\mathcal{B}}$
i otrzymujemy $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 7.2.36. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ jej bazami. Wówczas

i) $P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}\right)^{-1}$,

ii) $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''}$.

Dowód. Wykorzystując zapis przyjęty w dowodzie twierdzenia 7.2.34, mamy
$[b_1' \, b_2' \, \ldots \, b_n'] = [b_1 \, b_2 \, \ldots \, b_n] P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ oraz $[b_1'' \, b_2'' \, \ldots \, b_n''] = [b_1' \, b_2' \, \ldots \, b_n'] P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''}$.
i) Macierz przejścia jest odwracalna, zatem $[b_1' \, b_2' \, \ldots \, b_n'] P^{-1}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = [b_1 \, b_2 \, \ldots \, b_n]$.
ii) Mnożenie macierzy jest łączne, zatem
$[b_1'' \, b_2'' \, \ldots \, b_n''] = [b_1' \, b_2' \, \ldots \, b_n'] P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''} = ([b_1 \, b_2 \, \ldots \, b_n] P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}) \, P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''} = [b_1 \, b_2 \, \ldots \, b_n] \, (P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''})$.
□