Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 10
Data: ....

TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

8.1 Definicja i podstawowe własności

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K.

Definicja 8.1.1. Odwzorowanie $\varphi : V \to W$ spełniające warunki

i) własność addytywności $\forall u, v \in V \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v)$

ii) własność jednorodności $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v)$,

nazywamy *odwzorowaniem liniowym* lub *przekształceniem liniowym* lub *homomorfizmem przestrzeni liniowych.*

Twierdzenie 8.1.2. Niech $\varphi : V \to W$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) φ jest liniowe

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$

iii) $\forall v_1, \ldots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$
$\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \ldots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$

Dowód. i)$\Rightarrow$ ii) Jeśli φ jest liniowe, to wówczas $\varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \varphi(\alpha \cdot u) \oplus \varphi(\beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$ dla dowolnych $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in K$.
ii) $\Rightarrow$ i) Przyjmując $\alpha = \beta = 1$ otrzymujemy własność addytywności, zaś przyjmując $\alpha = 0, \beta \neq 0$ otrzymujemy własność jednorodności.
ii)$\Leftrightarrow$ iii) Wystarczy przeprowadzić dowód indukcyjny. $\square$

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących V w W oznaczamy $\mathcal{L}_K(V, W)$ lub $Hom_K(V, W)$ (lub krótko $\mathcal{L}(V, W)$ lub $Hom(V, W)$, gdy wiemy, z jakim ciałem mamy do czynienia).

Uwaga 8.1.3. Często notujemy $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, +, K, \cdot)$, to znaczy używamy tych samych symboli dla działań w przestrzeniach V i W, mimo że są to różne działania.

Przykład 8.1.4. Czy φ jest liniowe?

1) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ ustalone

Odwzorowanie jest liniowe, bowiem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in R$ mamy
$\varphi(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha\varphi(x)$ oraz
$\varphi(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$.

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ustalone

Jeśli $b \neq 0$, to odwzorowanie <u>nie</u> jest liniowe, bowiem
$\varphi(1 + 1) = \varphi(2) = 2a + b \neq \varphi(1) + \varphi(1) = (a + b) + (a + b) = 2a + 2b$.

3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, symetria względem osi Ox

Ponieważ $\varphi(x, y) = (x, -y)$, zatem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
$\varphi(\alpha(x, y)) = \varphi(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x, -y) = \alpha\varphi(x, y)$ oraz
$\varphi\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) =$
$(x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)$.
Odwzorowanie jest liniowe.

4) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

Odwzorowanie <u>nie</u> jest liniowe.
$L = \varphi\big(\alpha(x, y, z)\big) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + 1)$
$P = \alpha\varphi(x, y, z) = \alpha(x - z + z, 2y + z + 1) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + \alpha)$
Na ogół $L \neq P$. Możemy podać kontrprzykład
$\varphi\big(5 \cdot (1, 0, 0)\big) = \varphi(5, 0, 0) = (5, 1) \neq 5 \cdot \varphi(1, 0, 0) = 5 \cdot (1, 1) = (5, 5)$

Uwaga 8.1.5. i) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

ii) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + jz)$.

Przykład 8.1.6. Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, dane wzorem
$\varphi(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x)$, dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_2[x]$, jest liniowe?

Sprawdzimy, że φ jest liniowe. Wynika to z liniowości różniczkowania.
Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ mamy
$\varphi(p+q)(x) = (3-x)(p+q)''(x)+4(p+q)'(x) = (3-x)\Big(p''(x)+q''(x)\Big)+4\Big(p'(x)+q'(x)\Big) =$
$\Big((3 - x)p''(x) + 4p'(x)\Big) + \Big((3 - x)q''(x) + 4q'(x)\Big) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x)$,
dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(p + q) = \varphi(p) + \varphi(q)$.
Dla dowolnych $p \in \mathbb{R}_2[x], \alpha \in \mathbb{R}$ mamy

$\varphi(\alpha p)(x) = (3-x)(\alpha p)''(x) + 4(\alpha p)'(x) = (3-x)\alpha \cdot p''(x) + 4\alpha \cdot p'(x) = \alpha \cdot \Big((3-x)p''(x) + 4p'(x)\Big) = \alpha \cdot \varphi(p)(x)$. dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(\alpha p) = \alpha\varphi(p)$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$.

Twierdzenie 8.1.7. Jeśli odwzorowanie $\varphi : V \to W$ jest liniowe, to wówczas

i) $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$,

ii) $\forall v \in V\ \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Dowód. i) Ponieważ $\mathbf{0}_W + \varphi(x) = \varphi(x) = \varphi(x + \mathbf{0}_V) = \varphi(x) + \varphi(\mathbf{0}_V)$, zatem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
ii) Na mocy i) dla dowolnego $v \in V$ mamy $\mathbf{0}_W = \varphi(\mathbf{0}_V) = \varphi(v - v) = \varphi(v) + \varphi(-v)$. Stąd $\varphi(-v) = -\varphi(v)$. □

Wniosek 8.1.8. Niech $\varphi : V \to W$. Jeśli $\varphi(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, to φ nie jest liniowe.

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 8.1.7 i) na mocy prawa kontrapozycji. □

Przykład 8.1.9. Odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ nie jest liniowe, bowiem $f(0) = 5 \neq 0$.

Definicja 8.1.10. Odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$ nazywamy:

i) *monomorfizmem*, jeśli φ jest injekcją,

ii) *epimorfizmem*, jeśli φ jest surjekcją,

iii) *izomorfizmem*, jeśli φ jest bijekcją,

iv) *endomorfizmem*, jeśli $V = W$,

v) *automorfizmem*, jeśli $V = W$ i φ jest bijekcją,

vi) *formą liniową*, jeśli $W = K$.

Twierdzenie 8.1.11. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K. Niech $(b_1, \ldots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz niech $w_1, \ldots, w_n \in W$ będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ takie, że $\varphi(b_i) = w_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dowód. Dla dowolnego $v \in V$ istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$. Ponieważ φ jest liniowe, zatem $\varphi(v) = \varphi(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n) = \alpha_1\varphi(b_1) + \ldots + \alpha_n\varphi(b_n) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$. Zatem φ jest określone na całej przestrzeni V w sposób jednoznaczny.
□

Uwaga 8.1.12. Z powyższego twierdzenia wynika, że aby w pełni określić odwzorowanie liniowe na przestrzeni liniowej V wystarczy określić obrazy wektorów bazowych przestrzeni V.

Przykład 8.1.13. Podaj wzór odwzorowania liniowego φ, jeśli

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(x^2+x) = 6x+10, \quad \varphi(x-1) = 4, \quad \varphi(2x) = 8.$$

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_2[x]$ bazą standardową jest $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Mamy

$$\begin{cases} \varphi(x^2+x) = \varphi(x^2) + \varphi(x) = 6x+10 \\ \varphi(x-1) = \varphi(x) - \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 8 \end{cases}.$$

Stąd $\varphi(x) = 4$, $\varphi(1) = \varphi(x) - 4 = 0$, $\varphi(x^2) = 6x + 10 - \varphi(x) = 6x + 6$.

Dowolny $p \in \mathbb{R}_2[x]$ jest postaci $p(x) = ax^2 + bx + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1) = a \cdot (6x + 6) + b \cdot 4 + c \cdot 0 = 6ax + 6a + 4b$.

8.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

Definicja 8.2.1.
i) Zbiór $\{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$ nazywamy *jądrem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\mathrm{Ker}\varphi$.

ii) Zbiór $\{w \in W : \exists v \in V\, \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$ nazywamy *obrazem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\mathrm{Im}\varphi$ lub $\varphi(V)$.

Uwaga 8.2.2. Dla dowolnego odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ zbiory $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathrm{Im}\varphi$ są niepuste.

Dowód. Ponieważ $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, zatem $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathbf{0}_W \in \mathrm{Im}\varphi$. $\square$

Twierdzenie 8.2.3. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ zbiór $\mathrm{Ker}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, zaś zbiór $\mathrm{Im}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W.

Dowód. Niech $x, y \in \mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\alpha, \beta \in K$. Wówczas $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) = \alpha \cdot \mathbf{0}_W + \beta \cdot \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$. Zatem $\alpha x + \beta y \in \mathrm{Ker}\varphi$.
Niech teraz $w_1, w_1 \in \mathrm{Im}\varphi$ oraz $\alpha, \beta \in K$. Wówczas istnieją $v_1, v_2 \in V$ takie, że $w_1 = \varphi(v_1)$, $w_2 = \varphi(v_2)$. Stąd $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha\varphi(v_2) + \beta\varphi(v_2) = \varphi(\alpha v_1 + \beta v_2)$, gdzie $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$. Zatem $\alpha w_1 + \beta w_2 \in \mathrm{Im}\varphi$. $\square$

Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

Twierdzenie 8.2.4. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

i) φ jest injekcją $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$,

ii) φ jest surjekcją $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\varphi = W$.

Dowód. i) Jeśli φ nie jest injekcją, to istnieją $u, v \in V$ takie, że $u \neq v$ oraz $\varphi(u) = \varphi(v)$. Stąd $u - v \neq \mathbf{0}_V$ oraz $\varphi(u - v) = \varphi(u) - \varphi(v) = \mathbf{0}_W$. A zatem $u - v \in \mathrm{Ker}\varphi$ i $\mathrm{Ker}\varphi \neq \{\mathbf{0}_V\}$.
Jeśli $\mathrm{Ker}\varphi \neq \{\mathbf{0}_V\}$, to istnieje $v \in V$ takie, że $v \neq \mathbf{0}_V$ oraz $v \in \mathrm{Ker}\varphi$. Stąd $\varphi(v) = \mathbf{0}_W = \varphi(\mathbf{0}_V)$, a zatem φ nie jest injekcją.
ii) Teza jest oczywista. $\square$

Definicja 8.2.5. Jeśli $\dim \mathrm{Im}\varphi < \infty$, to liczbę tę nazywamy *rzędem* odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ i oznaczamy $r(\varphi)$ lub $\mathrm{rank}(\varphi)$.

Twierdzenie 8.2.6. (Twierdzenie o rzędzie, Rank-nullity theorem) Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$. Wówczas

$$r(\varphi) + \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim V.$$

Bez dowodu. Dowód można znaleźć w [4].

Wniosek 8.2.7. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ mamy $\dim \mathrm{Im}\varphi \leq \dim V$.

Przykład 8.2.8.

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t, x - y + z + 6t, x + y - z - 4t)$$

Wyznacz jądro oraz obraz φ, ich bazy i wymiary. Podaj własności φ.

$$\varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y + z + 6t = 0 \\ x + y - z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{2}w_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ x = -3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}\varphi = \{(-t, 2t, -3t, t),\ t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\{(-1, 2, -3, 1)\}$
Układ $\{(-1, 2, -3, 1)\}$ jest bazą $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 1$.
Zatem φ nie jest monomorfizmem. Ponadto
$r(\varphi) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}\varphi = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, zatem φ jest epimorfizmem.
Stąd $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$. Można to również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.
$\varphi(x, y, z, t) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + z(1, 1, -1) + t(2, 6, -4)$
$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (2, 6, -4)\}$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$$

Układ $\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{Im}\varphi$.
$\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge \dim \mathrm{Im}\varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$.

8.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech U,V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

Twierdzenie 8.3.1. Zbiór $\mathcal{L}(V,W)$ wraz z działaniami

$$+ : \mathcal{L}(V,W) \times \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(V,W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(V,W)$$

określonymi wzorami $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$,
jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

Dowód. Sprawdzimy, że jest to podprzestrzeń liniowa przestrzeni funkcji $W^V = \{f : V \to W\}$. Niech $f, g \in \mathcal{L}(V,W)$ oraz $\alpha, \beta \in K$. Wówczas $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(V,W)$, bowiem dla dowolnych $v_1, v_1 \in V$, $a, b \in K$ mamy
$(\alpha f + \beta g)(av_1 + bv_2) = \alpha \cdot f(av_1 + bv_2) + \beta \cdot g(av_1 + bv_2) = \alpha \cdot \Big(af(v_1) + bf(v_2)\Big) + \beta \cdot \Big(ag(v_1) + bg(v_2)\Big) = a \cdot \Big(\alpha f(v_1) + \beta g(v_1)\Big) + b \cdot \Big(\alpha f(v_2) + \beta g(v_2)\Big) =$
$a \cdot (\alpha f + \beta g)(v_1) + b \cdot (\alpha f + \beta g)(v_2)$. $\square$

Twierdzenie 8.3.2. i) Jeśli $f \in \mathcal{L}(U,V)$ oraz $g \in \mathcal{L}(V,W)$, to wówczas $g \circ f \in \mathcal{L}(U,W)$.

ii) Jeśli $f \in \mathcal{L}(V,W)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{L}(W,U)$.

Dowód. i) Dla dowolnych $u_1, u_2 \in U$, $a, b \in K$ mamy
$(g \circ f)(au_1 + bu_2) = g\Big(f(au_1 + bu_2)\Big) = g\Big(af(u_1) + bf(u_2)\Big) = ag\Big(f(u_1)\Big) + bg\Big(f(u_2)\Big) =$
$a \cdot (g \circ f)(u_1) + b \cdot (g \circ f)(u_2)$.
ii) Jeśli f jest bijekcją, to f^{-1} również jest bijekcją. Ponadto $\mathrm{Im} f = W$, zatem dla dowolnych $w_1, w_2 \in W$ istnieją $v_1, v_2 \in V$ takie, że $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$. Dla dowolnych $a, b \in K$ mamy
$f^{-1}(aw_1 + bw_2) = f^{-1}\Big(af(v_1) + bf(v_2)\Big) = f^{-1}\Big(f(av_1 + bv_2)\Big) = (f^{-1} \circ f)(av_1 + bv_2) =$
$av_1 + bv_2 = a(f^{-1} \circ f)(v_1) + b(f^{-1} \circ f)(v_2)$. $\square$

Oznaczmy przez $Aut_K(V) = \{f \in \mathcal{L}_K(V,V) : \ f{-}bijekcja\}$ zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej V.

Wniosek 8.3.3. Zbiór $Aut_K(V)$ wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprzemienną.

Dowód. Wewnętrzność działania składania wynika na mocy twierdzenia 8.3.2 i). Składania odwzorowań jest łączne. Elementem neutralnym jest odwzorowanie identycznościowe id_V. Elementem symetrycznym do $f \in Aut_K(V)$ jest f^{-1}, bowiem na mocy twierdzenia 8.3.2 ii) $f^{-1} \in Aut_K(V)$. $\square$

Grupa $Aut_K(V)$ bywa też oznaczana symbolem $GL(V)$ i nazywana *pełną* lub *ogólną grupą liniową przestrzeni liniowej* V.

Przykład 8.3.4. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dane wzorem
$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 11
Data: ....

TEMAT: *Przekształcenia liniowe - ciąg dalszy*

9.1 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V = \big(b_1, \ldots, b_n\big)$ oraz $\mathcal{B}_W = \big(c_1, \ldots, c_m\big)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$.

Definicja 9.1.1. *Macierzą* (lub *reprezentacją macierzową*) *odwzorowania liniowego* φ w bazach $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ nazywamy macierz $A \in M_{m\times n}(K)$, której kolejne kolumny to współrzędne wektorów $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)$ w bazie $\mathcal{B}_W$. Oznaczamy ją symbolem $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Przykład 9.1.2. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad \varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$, gdy rozważamy

a) w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ bazy kanoniczne

$$\varphi(1,0,0) = (3,0),\ \varphi(0,1,0) = (0,2),\ \varphi(0,0,1) = (0,1), \quad M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y + z \end{bmatrix}$$

b) bazy $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,2,0), b_2 = (1,1,1), b_3 = (0,0,1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,2), c_2 = (0,1)\big)$

$$\varphi(b_1) = \varphi(1,2,0) = (3,4) = [\alpha_1, \beta_1]_\mathcal{C}, \qquad (3,4) = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1),$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 3, \beta_1 = -2,\ \varphi(b_1) = [3,-2]_\mathcal{C}$$
$$\varphi(b_2) = \varphi(1,1,1) = (3,3) = [\alpha_2, \beta_2]_\mathcal{C}, \qquad (3,3) = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2)$$
$$\Rightarrow \alpha_2 = 3, \beta_2 = -3,\ \varphi(b_2) = [3,-3]_\mathcal{C}$$
$$\varphi(b_3) = \varphi(0,0,1) = (0,1) = [\alpha_3, \beta_3]_\mathcal{C}, \qquad (3,4) = \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3)$$
$$\Rightarrow \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1,\ \varphi(b_3) = [0,1]_\mathcal{C}$$
$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obserwacja: Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

Uwaga 9.1.3. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)$.

Przykład 9.1.4. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{C}_1[z] \to M_2(\mathbb{C})$, $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$, względem baz standardowych danych przestrzeni $(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$ oraz $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$.

Weźmy dowolny $p \in \mathbb{C}_1[z]$. Jest on postaci $p(z) = \alpha z + \beta$.
Rozważamy bazę $\mathcal{B} = \big(1, z\big)$ przestrzeni $\mathbb{C}_1[z]$ oraz bazę $\mathcal{C} = \big(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\big)$ przestrzeni $M_2(\mathbb{C})$.
$f(1) = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 0, 0, 1]_{\mathcal{C}}$
$f(z) = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = A = [2 + i, 1, 3, 4 - i]_{\mathcal{C}}$
$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[z] = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) = 4$, $\Rightarrow$ $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4\times 2}(\mathbb{C})$, $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4-i \end{bmatrix}$

Twierdzenie 9.1.5. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V = \big(b_1, \ldots, b_n\big)$ oraz $\mathcal{B}_W = \big(c_1, \ldots, c_m\big)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Oznaczmy

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

gdzie $v = [x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{B}_V}$, $w = [y_1, \ldots, y_m]_{\mathcal{B}_W}$. Wówczas

$$\varphi(v) = w \quad \Leftrightarrow \quad AX = Y.$$

Dowód. Obliczamy $\varphi(v) = \varphi(x_1b_1 + \ldots + x_nb_n) = x_1\varphi(b_1) + \ldots + x_n\varphi(b_n) =$
$= x_1(a_{11}c_1 + \ldots + a_{m1}c_m) + \ldots + x_n(a_{1n}c_1 + \ldots + a_{mn}c_m) = (x_1a_{11} + \ldots + x_na_{1n})c_1 + \ldots + (x_1a_{m1} + \ldots + x_na_{mn})c_m$. Ponieważ współrzędne $w = \varphi(v)$ w bazie $\mathcal{B}_W$ są określone jednoznacznie, zatem $\begin{cases} y_1 = & x_1a_{11} + \ldots + x_na_{1n} \\ & \ldots \\ y_m = & x_1a_{m1} + \ldots + x_na_{mn} \end{cases}$, czyli $AX = Y$. $\square$

Uwaga 9.1.6. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między odwzorowaniami liniowymi a macierzami (przy ustalonych bazach). Macierz odwzorowania liniowego φ w pełni opisuje to odwzorowanie, można zatem badać macierz, zamiast odwzorowania.

Wniosek 9.1.7. Rząd macierzy A przekształcenia liniowego φ nie zależy od wyboru baz $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$. Ponadto $\operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank} A$.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 9.1.5. Ponieważ $w = \varphi(v) = x_1\varphi(b_1) + \ldots + x_n\varphi(b_n)$, zatem $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{lin}\{\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)\}$. Ponadto $\begin{cases} \varphi(b_1) = & a_{11}c_1 + \ldots + a_{m1}c_m \\ & \ldots \\ \varphi(b_n) = & a_{1n}c_1 + \ldots + a_{mn}c_m \end{cases}$.
Stąd $r(\varphi) = \dim \operatorname{Im}\varphi = r(A)$. $\square$

Wniosek 9.1.8. Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 9.1.5. Wówczas

i) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow$ $r(A) = m$,

ii) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$.

Dowód. i) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im}\varphi = W$ $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim W = m$.
ii) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_V\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 0$. Na mocy twierdzenia o rzędzie $\dim \operatorname{Ker}\varphi = n - \dim \operatorname{Im}\varphi$, zatem $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_V\}$ $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$. $\square$

Przykład 9.1.2 - ciąg dalszy
Oblicz $\varphi(1,2,3)$ dwoma sposobami, za pomocą macierzy $M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2)$ oraz za pomocą $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Czy φ jest monomorfizmem /epimorfizmem?

Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.
$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$
Sprawdzenie $\varphi(1,2,3) = (3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 2) = (3,7)$
$(1,2,3) = 1(1,2,0) + 3(0,0,1) = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3 = [1,0,3]_{\mathcal{B}}$
$A' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
Stąd $\varphi(1,2,3) = [3,1]_{\mathcal{C}} = 3c_1 + c_2 = 3(1,2) + (0,1) = (3,7)$.
Dodatkowo zauważmy, że $r(A) = r(A') = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, zatem φ jest epimorfizmem.
Ponadto $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 3 - 2 = 1$, więc φ nie jest monomorfizmem.

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $\alpha \in K$, $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Twierdzenie 9.1.9. Przy powyższych założeniach

$$A + B = M_{f+g}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) \quad \text{oraz} \quad \alpha A = M_{\alpha f}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W).$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 8.3.1 wiemy, że odwzorowania $f+g$ oraz αf są liniowe. Niech $v \in V$, $w = (f+g)(v), w_1 = f(v), w_2 = g(v), z = (\alpha f)(v)$. Ponadto niech X, Y, Y_1, Y_2, Z oznaczają wektory kolumnowe współrzędnych wektorów v, w, w_1, w_2, z w bazach $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ odpowiednio. Wówczas
$M_{f+g}X = Y \Leftrightarrow (f+g)(v) = w \Leftrightarrow f(v)+g(v) = w \Leftrightarrow w_1 + w_1 = w \Leftrightarrow Y_1 + Y_2 = Y \Leftrightarrow AX + BX = Y \Leftrightarrow (A+B)X = Y$.
Analogicznie $M_{\alpha f}X = Z \Leftrightarrow (\alpha f)(v) = z \Leftrightarrow \alpha \cdot f(v) = z$.
Dla $\alpha \neq 0$ mamy $f(v) = \frac{z}{\alpha} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{\alpha}Z \Leftrightarrow \alpha \cdot AX = Z \Leftrightarrow (\alpha \cdot A)X = Z$.
Dla $\alpha = 0$, mamy $z = \mathbf{0}_W$, więc równość $(0 \cdot A)X = \mathbf{0}$ jest spełniona. $\square$

Twierdzenie 9.1.10. Jeśli $\dim V = \dim W$, to wówczas następujące warunki są równoważne.

i) f jest izomorfizmem

ii) $\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\mathrm{Im} f = W$

iv) $r(A) = \dim V$

v) $\det A \neq 0$

Dowód. i) $\Rightarrow$ ii) Jeśli f jest izomorfizmem, to jest odwracalne, a zatem różnowartościowe.
ii) $\Rightarrow$ iii) Załóżmy, że $\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$, wówczas $\dim \mathrm{Im} f = \dim V - \dim \mathrm{Ker} f = \dim V - 0 = \dim W$, skąd $\mathrm{Im} f = W$.
iii) $\Rightarrow$ iv) Jeśli $\mathrm{Im} f = W$, to $r(A) = r(f) = \dim W = \dim V$.
iv) $\Rightarrow$ v) Załóżmy, że $r(A) = \dim V = n$. Wówczas A jest macierzą kwadratową stopnia n taką, że $\det A \neq 0$.
v) $\Rightarrow$ i) Jeśli $\det A \neq 0$, to $r(A) = \dim V$. Ponadto $r(A) = \dim \mathrm{Im} f$, zatem $\mathrm{Im} f = W$. Pozostało wykazać injektywność. Weźmy $v_1, v_2 \in V$ takie, że $f(v_1) = f(v_2)$. Wówczas $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = \mathbf{0}_W$. Niech X oznacza kolumnę współrzędnych wektora $v_1 - v_2$ w bazie $\mathcal{B}_V$. Mamy $AX = \mathbf{0}$ oraz $\det A \neq 0$, skąd $X = \mathbf{0}$. Zatem $v_1 - v_2 = \mathbf{0}_V$, czyli $v_1 = v_1$. $\square$

Wniosek 9.1.11. Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie izomorfizmem oraz niech $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas $A^{-1} = M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$.

Dowód. Jeśli f jest izomorfizmem, to $\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$, skąd $\dim V = \dim W$. Na mocy twierdzenia 9.1.10 mamy $\det A \neq 0$. Zatem istnieje A^{-1}, skąd $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$.
$\square$

Twierdzenie 9.1.12. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $f \in \mathcal{L}(U, V)$, $g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas

$$B \cdot A = M_{g \circ f}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W).$$

Dowód. Niech $u \in U, f(u) = v, g(v) = w$ oraz niech X, Y, Z oznaczają wektory kolumnowe współrzędnych wektorów u, v, w w bazach $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ odpowiednio. Wówczas $M_{g\circ f}X = Z \Leftrightarrow (g \circ f)(u) = w \Leftrightarrow g\big(f(u)\big) = w \Leftrightarrow AX = Y \wedge BY = Z \Leftrightarrow B(AX = Z \Leftrightarrow (BA)X = Z.$ $\square$

Przykład 9.1.13. Dane są odwzorowania liniowe
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z),$
$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g(x, y, z) = (x - 3z, x + y),$
$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ h(x, y) = (2x + y, x - y).$
Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania
$\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f + g)$ i oblicz $\varphi(1, 2, 3)$.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) \in M_{2\times3}(\mathbb{R}),\ M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_g := M_g(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) \in M_{2\times3}(\mathbb{R}),\ M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{f+g} := M_{f+g}(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) \in M_{2\times3}(\mathbb{R}), \quad M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Czy h jest odwracalne?

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}^2_k, \mathcal{B}^2_k) \in M_2(\mathbb{R}),\ M_h = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det M_h = -3 \neq 0 \Rightarrow h$ jest odwracalne

$M_{h^{-1}} := M_{h^{-1}}(\mathcal{B}^2_k, \mathcal{B}^2_k) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_{h^{-1}} = \big(M_h\big)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_\varphi := M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) \in M_{2\times3}(\mathbb{R}),$

$M_\varphi = 2M^2_{h^{-1}}M_{f+g} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}$

$\varphi(x, y, z) = ?$

$M_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 3x - 5y - 5z \\ 3x + 16y - 7z \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(x, y, z) = (\frac{2}{3}x - \frac{10}{9}y - \frac{10}{9}z, \frac{2}{3}x + \frac{32}{9}y - \frac{14}{9}z)$

$\varphi(1, 2, 3) = ?$

$M_\varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} -22 \\ 56 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(1, 2, 3) = (-\frac{44}{9}, \frac{112}{9})$

9.2 Zmiana baz

Twierdzenie 9.2.1. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą bazami przestrzeni V i W. Rozważmy nowe bazy $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$ oraz odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$. Niech $P = P_{\mathcal{B}_V \to \mathcal{B}'_V}$, $Q = P_{\mathcal{B}_W \to \mathcal{B}'_W}$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W)$. Wówczas

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Dowód. Ponieważ $X = PX'$, $Y = QY'$, $AX = Y$, $A'X' = Y'$, zatem $QY' = Y = AX = APX' \Rightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X'$. $\square$

Przykład 9.1.2 raz jeszcze
Korzystając ze wzoru ma zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, wyznaczymy macierz $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$ w bazach $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1)\big)$.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ?$$

$$P = P_{\mathcal{B}^3_k \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, Q = P_{\mathcal{B}^2_k \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Uwaga 9.2.2. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}'$ jej dwiema bazami. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania identycznościowego $\mathrm{id} : V \to V$ przestrzeni V z bazą $\mathcal{B}'$ w przestrzeń V z bazą $\mathcal{B}$.

Dowód. Niech $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$. Wówczas

$$\begin{cases} \mathrm{id}(b'_1) = b'_1 = a_{11}b_1 + \ldots + a_{n1}b_1 \\ \ldots \\ \mathrm{id}(b'_n) = b'_1 = a_{n1}b_1 + \ldots + a_{nn}b_n \end{cases}, \text{ skąd } P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = M_{\mathrm{id}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}). \quad \square$$