Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 13
Data: ....

BEZ ĆWICZEŃ! dla kursu analizy!

forma liniowa $(V, +, K, \cdot) \to K$ liniowa $\parallel (K, +, K, \cdot)$

TEMAT: *Formy kwadratowe*

11.1 Definicja formy kwadratowej

Przypomnienie: Każdą macierz kwadratową D można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej $D = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(D + D^T)$, $C = \frac{1}{2}(D - D^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$.

$B = B^T$ – symetria wzg. przekątnej

Obserwacja: $X^T DX = X^T BX$
Istotnie $X^T DX = X^T(B + C)X = X^T BX + X^T CX$ oraz
$X^T CX = X^T \frac{D-D^T}{2} X = \frac{1}{2}\left(X^T DX - X^T D^T X\right) = \frac{1}{2}\left(X^T DX - (X^T D^T X)^T\right) = \frac{1}{2}\left(X^T DX - X^T DX\right) = O$

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną, tzn. $A = A^T$.
Na mocy powyższej obserwacji możemy przyjąć to założenie bez straty dla ogólności.

Definicja 11.1.1. Funkcję $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ daną wzorem $\gamma(x) = X^T AX$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, nazywamy *formą kwadratową*. Macierz symetryczną A nazywamy *macierzą formy kwadratowej* γ.

Np. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
$\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\gamma(x, y) = ?$
$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{bmatrix} = x^2 + 2xy + 3xy + 4y^2$ yx

Uwaga 11.1.2. i) Jeśli $A = [a_{ij}]$, to wówczas $\gamma(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$.

ii) γ jest wielomianem n zmiennych jednorodnym stopnia 2.

wszystkie jednomiany tego samego stopnia

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \gamma(\lambda x) = \lambda^2 \gamma(x)$

Dowód. i) $[x_1 \ldots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \ldots x_n] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} =$
$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$
ii) Na mocy *i)* każdy jednomian γ jest stopnia 2.
iii) Niech $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wówczas na mocy i) mamy $\gamma(\lambda x) = \gamma(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\lambda x_i)(\lambda x_j) = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$. $\square$

Np. $g(x,y) = x^2 + 6xy + y^2$
jednorodny st. 2

Np. $f(x,y,z) = z^3 + 4x^2y^5 + 7x - 10$
$\deg f = 7$

$g(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 6(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 \cdot 6xy + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 \cdot g(x,y)$