Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
**Wykład nr 12**
Data: .......................

TEMAT: *Zagadnienie własne operatora liniowego*

## 10.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową wymiaru $n$. Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni $V$ nazywamy również *operatorami liniowymi.*

**Twierdzenie 10.1.1.** i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru $n^2$.

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemiennego.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$

*Dowód.* i), ii) Wynikają z twierdzeń 8.3.1 oraz 8.3.2. iii) Wynika z odpowiednich związków dla macierzy odwzorowań $f, g, f \circ g, \alpha f, \alpha g$. □

**Definicja 10.1.2.** Podprzestrzeń liniową $U$ przestrzeni $V$ nazywamy *niezmienniczą względem endomorfizmu* $\varphi \in End(V)$ lub krótko *$\varphi$-niezmienniczą*, jeżeli

$$\varphi(U) \subset U, \quad tzn. \quad \forall u \in U \; \varphi(u) \in U.$$

**Przykład 10.1.3.** 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0,0,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

Zauważmy, że $\varphi$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi $Oz$.
Zatem dla $(0,0,t) \in U$ mamy $\varphi(0,0,t) = (0,0,t) \in U$ i $U$ jest $\varphi$-niezmiennicza.

2) Niech $V$, $\varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \mathrm{Ker}\varphi$

Niech $u \in U$, wówczas $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$. Oczywiście $\mathbf{0}_V \in U$, bowiem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$.
Zatem $U$ jest $\varphi$-niezmiennicza.

**Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych**

Dla dowolnego endomorfizmu $\varphi : V \to V$ i dla dowolnej podprzestrzeni $U \subset V$, mamy $\varphi(U) \subset V$.
Gdy $U$ jest $\varphi$-niezmiennicza mamy $\varphi(U) \subset U$, zatem restrykcja $\varphi|_U : U \to U$, czyli $\varphi|_U \in End(U)$.

Niech $V$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Niech $\varphi \in End(V)$.

**Definicja 10.1.4.** i) Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu $\varphi$, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$. Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu $\varphi$, odpowiadającym wartości własnej $\lambda$.

ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu $\varphi$ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu $\varphi$.

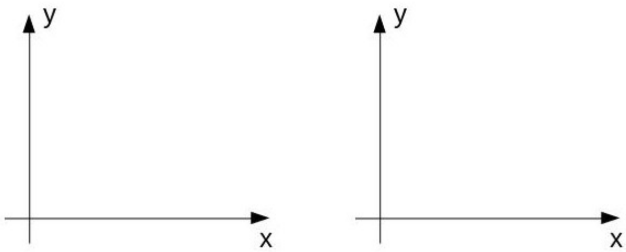
iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego $\varphi$ oznaczamy symbolem $Spec(\varphi)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

**Przykład 10.1.5.** Niech $V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ oraz $\varphi = \frac{d}{dx}$, tzn. dla dowolnego $f \in V$ mamy $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$. Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora $\frac{d}{dx}$. Istotnie, niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Zdefiniujmy
$g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$. Oczywiście $g_\lambda \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Ponadto $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$. Zatem $g_\lambda$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda$. Stąd $Spec(\varphi) = \mathbb{R}$.

**Uwaga 10.1.6.** Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

*Dowód.* Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ takie, że $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$. Wówczas $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$. Ponieważ $v \neq \mathbf{0}_V$, zatem $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

**Przykład 10.1.7.** Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś $Ox$. Rozważ zagadnienie własne dla operatora $\varphi$.
Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co $v$. Zatem możliwe są dwie sytuacje:
1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = \mathbf{0}$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$



**Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu**
Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczymy taką bazę przestrzeni liniowej $V$, że macierz endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ w tejże bazie będzie diagonalna.
Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych $\varphi$.
Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

Niech $V$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Niech $\varphi \in End(V)$ oraz $\lambda \in Spec(\varphi)$. Oznaczmy przez $E_\lambda$ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda$, uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

**Twierdzenie 10.1.8.** i) Zbiór $E_\lambda$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $V$.

ii) Zbiór $E_\lambda$ jest podprzestrzenią $\varphi$-niezmienniczą.

iii) $E_\lambda = \mathrm{Ker}\psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

*Dowód.* i) Dla dowolnych $v, w \in E_\lambda$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy $\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w) = \alpha\lambda v + \beta\lambda w = \lambda(\alpha v + \beta w)$, czyli $\alpha v + \beta w \in E_\lambda$.
ii) Na mocy i) jeśli $v \in E_\lambda$, to $\varphi(v) = \lambda v \in E_\lambda$.
iii) $\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V(v) = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v) = \mathbf{0}_V$
$\square$

**Definicja 10.1.9.** Przestrzeń wektorową $E_\lambda$ nazywamy *podprzestrzenią własną* endomorfizmu $\varphi$, odpowiadającą wartości własnej $\lambda$.

**Uwaga 10.1.10.** Na mocy uwagi 10.1.6 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in End(V)$, możemy badać jego restrykcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in End(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze $E_{\lambda_i}$, gdzie $\lambda_i \in Spec(\varphi)$.

**Twierdzenie 10.1.11.** Niech $V$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech $A$ będzie macierzą odwzorowania $\varphi$ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni $V$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in Spec(\varphi)$

ii) $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

*Dowód.* i) $\Leftrightarrow$ ii) Jeśli $\lambda \in Spec(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$, czyli $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \lambda v = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v)$. Stąd $v \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$. I odwrotnie, jeśli $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v) = \mathbf{0}_V$, czyli $\varphi(v) = \lambda v$.
ii) $\Leftrightarrow$ iii) Niech $v \in V$ oraz niech $X$ oznacza kolumnę współrzędnych wektora $v$ w ustalonej bazie przestrzeni $V$. Niech $A$ będzie macierzą $\varphi$ w tejże bazie. Wówczas $\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = \mathbf{0}$. Układ jednorodny $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$ ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $\det(A - \lambda I) = 0$. $\square$

**Wniosek 10.1.12.** Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni $V$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $\mathbf{0}_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \ldots, x_n]_\mathcal{B}$ jest wektorem własnym endomorfizmu $\varphi$, odpowiadającym wartości własnej $\lambda$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

**Twierdzenie 10.1.13.** Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni $V$.

*Dowód.* Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ będą dwiema różnymi bazami przestrzeni $V$. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ oraz $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. Na mocy twierdzenia 9.2.1 mamy $A' = P^{-1}AP$. Ponadto $\det(A' - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) = \det\big(P^{-1}(A - \lambda I)P\big) = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I)$, bowiem $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det P}$. $\square$

**Definicja 10.1.14.** *Wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie $A$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania $\varphi$ w pewnej bazie przestrzeni $V$. Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu $\chi_\varphi$ nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi* odwzorowania $\varphi$.

**Uwaga 10.1.15.**

i) Rzeczywiste pierwiastki charakterystyczne wielomianu $\chi_\varphi$ to dokładnie wartości własne endomorfizmu $\varphi$.

ii) Na mocy twierdzenia 10.1.13 wielomian $\chi_\varphi$ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni $V$.

iii) Jeśli $\dim V = n$, to wówczas $\deg \chi_\varphi = n$.

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$.

**Definicja 10.1.16.**

i) *Wielomianem charakterystycznym* macierzy $A$ nazywamy wielomian $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy $A$.

ii) Każdy <u>rzeczywisty</u> pierwiastek wielomianu $\chi_A$ nazywamy *wartością własną* macierzy $A$. Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy $A$ oznaczamy symbolem $Spec(A)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tej macierzy.

iii) Każdy <u>niezerowy</u> wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy *wektorem własnym* macierzy $A$, odpowiadającym wartości własnej $\lambda$.

**Uwaga 10.1.17.** Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{R}^n)$ są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, będącej reprezentacją macierzową odwzorowania $\varphi$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Niech $V$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową $n$-wymiarową. Niech $\varphi \in End(V)$ oraz $\lambda \in Spec(\varphi)$.

**Definicja 10.1.18.** i) Krotność $k_\lambda$ liczby $\lambda$ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego $\chi_\varphi$ nazywamy *krotnością algebraiczną* wartości własnej $\lambda$.

ii) Wymiar $\dim E_\lambda$ podprzestrzeni własnej $E_\lambda$ nazywamy *krotnością geometryczną* wartości własnej $\lambda$.

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy *prostymi*. Widmo składające się z $n$ różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy *widmem prostym*.

**Twierdzenie 10.1.19.** Niech $\varphi \in End(V)$ , $\lambda \in Spec(\varphi)$ oraz niech $A$ będzie reprezentacją macierzową $\varphi$ w pewnej bazie przestrzeni $V$. Wówczas

i) $1 \leq \dim E_\lambda \leq k_\lambda$,

ii) $\dim E_\lambda = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$.

*Szkic dowodu.* i) Jeśli $\lambda \in Spec(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $v \in E_\lambda$, zatem $1 \leq \dim E_\lambda$. Rozumowanie uzasadniające, że $\dim E_\lambda \leq k_\lambda$ można znaleźć w [4].
ii) Ponieważ $E_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$, zatem
$\dim E_\lambda = \dim V - \dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$. $\square$

**Przykład 10.1.20.** Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu

$$\varphi \in End(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z).$$

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t)$$

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ widmo proste
$E_{\lambda_3} = E_{-1} = ?$

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y &= 0 \\ 3y &= 0 \\ -2x - 2y &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0,\ z \in \mathbb{R}$$

Wektory własne odpowiadające $\lambda_3 = -1$ są postaci $v = (0, 0, z)$, gdzie $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$E_{-1} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(0, 0, 1)\}$ oraz $\dim E_{-1} = 1$
Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 10.1.19 ii), możemy obliczyć

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A+I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 10.1.19 i) mamy
$1 \leq \dim E_{\lambda_3} \leq k_3 = 1$, zatem $\dim E_{\lambda_3} = 1$.

Analogicznie wyznaczamy $E_{\lambda_1}$ oraz $E_{\lambda_2}$. Z góry wiemy, że $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

## 10.2 Diagonalizacja

**Twierdzenie 10.2.1.** Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in End(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

*Bez dowodu.* Dowód można znaleźć w [4].

**Twierdzenie 10.2.2.** Niech $V$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową $n$-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$.

i) Jeśli $\varphi$ ma widmo proste $Spec(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \ldots, v_n$, gdzie $v_i$ odpowiada $\lambda_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tworzą bazę przestrzeni $V$.

ii) Jeśli wektory własne $v_1, \ldots, v_n \in V$ endomorfizmu $\varphi$ (nie koniecznie odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni $V$ oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to macierz przekształcenia $\varphi$ w tejże bazie ma postać diagonalną

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

iii) Jeśli wielomian charakterystyczny $\chi_\varphi$ rozkłada się na czynniki liniowe

$$\chi_\varphi = (t - \lambda_1)^{k_1}(t - \lambda_2)^{k_2} \ldots (t - \lambda_p)^{k_p},$$

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$) i ponadto $k_i = \dim E_{\lambda_i}$, dla $i \in \{1, 2 \ldots, p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni $V$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu $\varphi$.

*Dowód.* i) Wynika z twierdzenia 10.2.1.
ii) Jeśli $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, to wówczas $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1 = [\lambda_1, 0, 0 \ldots, 0]_{\mathcal{B}}$, $\varphi(v_2) = \lambda_2 v_2 = [0, \lambda_2, 0 \ldots, 0]_{\mathcal{B}}, \ldots, \varphi(v_n) = \lambda_n v_n = [0, 0 \ldots, 0, \lambda_n]_{\mathcal{B}}$,

skąd $D = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$.
iii) Równość $k_i = \dim E_{\lambda_i}$ oznacza, że jeśli $\lambda_i$ jest $k_i$-krotnym pierwiastkiem wielomianu $\chi_\varphi$, to istnieje $k_i$ liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających $\lambda_i$. Z kolei fakt, że $\chi_\varphi$ rozkłada się na iloczyn czynników liniowych, implikuje równość $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} = n = \dim V$. $\square$

**Definicja 10.2.3.** Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ nazywamy *diagonalizowalnym*, gdy istnieje taka baza przestrzeni $V$, że macierz operatora $\varphi$ w tejże bazie jest macierzą diagonalną.

**Wniosek 10.2.4.** Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni $V$ złożona z wektorów własnych $\varphi$.

### Macierz diagonalizująca

**Definicja 10.2.5.** Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy macierzą *diagonalizowalną*, gdy istnieje macierz nieosobliwa $P \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz $P$ *diagonalizuje* macierz $A$.

**Wniosek 10.2.6.** Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych $A$.

*Dowód.* Niech $\mathcal{B}$ będzie pewną baza przestrzeni $V$ oraz niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ , dla pewnego $\varphi \in End(V)$. Załóżmy, że istnieje baza $\mathcal{B}'$ przestrzeni $V$, złożona z wektorów własnych $\varphi$. Oznaczmy $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$. Wówczas $A' = D = P^{-1}AP$, gdzie $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. $\square$

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

**Przykład 10.2.7.** Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 \neq 0.$
Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem
$Spec(A) = \varnothing$ i macierz rzeczywista $A$ nie jest diagonalizowalna.

**Przykład 10.2.8.** Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1,1,1) = (-1,-1,-1)$, $\varphi(0,1,1) = (0,1,1)$, $\varphi(0,0,1) = (0,0,2)$ jest diagonalizowalny?

Odczytujemy wartości własne i wektory własne
$\lambda_1 = -1, v_1 = (1,1,1)$, $\lambda_2 = 1, v_1 = (0,1,1)$, $\lambda_3 = 2, v_1 = (0,0,1)$.
Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 10.2.2 i), operator $\varphi$ jest diagonalizowalny.

**Przykład 10.2.9.** Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem
$\varphi(x,y,z) = (3x + 8z, 3x - y + 6z, -2x - 5z)$ jest diagonalizowalny?

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$

$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3$

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\}$, $k_1 = 3$

$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \{v = (x,y,z) : (A+I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$$\dim E_{-1} = 3 - r(A+I) = 3 - r\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq k_1 = 3.$$

Endomorfizm $\varphi$ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych $\varphi$.

**Wniosek 10.2.10.** Niech $V$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową $n$-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni $V$. Jeśli wektory własne $v_1 \ldots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = \big(v_1 \ldots, v_n\big)$ przestrzeni $V$, to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = PD^rP^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

*Dowód.* Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ oraz $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$. Wówczas $A^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ oraz $D^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Ponadto $D = P^{-1}AP$, skąd $A = PDP^{-1}$ oraz $A^r = (PDP^{-1})^r = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1})}_{r-razy} = PD(P^{-1}P)D\ldots(PP^{-1})DP^{-1} = PD^rP^{-1}$. □

**Przykład 10.2.11.** Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu $\varphi$ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy $\varphi$ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz $D$ endomorfizmu $\varphi$ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą $P$. Oblicz $\varphi^{101}(1,2,3)$.

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{w_2+2w_3}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{k_3+k_2}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \overset{k_2+k_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 4-t & 2-t & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (4-t)(2-t)^2 - 3(2-t)^2 = (2-t)^2(1-t)$$
$Spec\varphi = \{\lambda_1 = 1\lambda_2 = 2\}$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $\dim E_1 = 1$, $1 \leq \dim E_2 \leq 2$
$\varphi$ będzie diagonalizowalny, jeśli $\dim E_2 = 2 = k_2$.
$$\dim E_2 = 3 - r(A-2I) = 3 - r\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$$
zatem $\varphi$ jest diagonalizowalny.

Wyznaczymy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = 1$.
$$(A-I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-2w_1]{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$
$$\begin{cases} x - y & = 0 \\ y + 2z & = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -2z, z \in \mathbb{R}$$
$E_1 = \{(-2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(-2, -2, 1)\}$

Rozważmy $\lambda_2 = 2$.
$$(A-2I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$-x + y - z = 0 \Rightarrow z = y - x,\ x, y \in \mathbb{R}$
$E_2 = \{(x, y, y-x) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$
Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \big(v_1 = (-2, -2, 1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (0, 1, 1)\big)$
$$D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ macierz diagonalizująca } P := P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
Obliczymy $\varphi^{101}(1, 2, 3)$ na dwa różne sposoby.
METODA I: Wykorzystamy macierz $D$. Niech $v := (1, 2, 3) = [a, b, c]_\mathcal{C}$.
$$\text{Wówczas } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ skąd } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
$$\text{Obliczamy } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz } v = [2, 5, 6]_\mathcal{C}.$$
$$D^{101}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \cdot 2^{101} \\ 6 \cdot 2^{101} \end{bmatrix}$$
$\varphi^{101}(v) = [2, 5 \cdot 2^{101}, 6 \cdot 2^{101}]_\mathcal{C} = 2v_1 + 5 \cdot 2^{101} v_2 + 6 \cdot 2^{101} v_3 =$
$= (-4 + 5 \cdot 2^{101}, -4 - 6 \cdot 2^{101}, 2 + 2^{101})$

METODA II: Obliczamy

$$A^{101}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = PD^{101}P^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\-2 & 0 & 1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2^{101} & 0\\0 & 0 & 2^{101}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\3 & -2 & 2\\2 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}3\cdot 2^{101}-2 & 2-2^{102} & 2^{102}-2\\2^{102}-2 & 2-2^{101} & 2^{102}-2\\1-2^{101} & -1+2^{101} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4+5\cdot 2^{101}\\-4-6\cdot 2^{101}\\2+2^{101}\end{bmatrix}$$

**Przykład 10.2.12.** Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu $f$ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy $f$ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz $D$ endomorfizmu $f$ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą $P$.

$$f \in End(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) \text{ baza } M_2(\mathbb{R})$$

$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$f(E_{21}) = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

$$A = M_f(\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\chi_f(t) = \det(A - tI) = (2-t)\begin{vmatrix}1-t & 1 & 0\\1 & 1-t & 0\\0 & 0 & 2-t\end{vmatrix} = (2-t)^2\begin{vmatrix}1-t & 1\\1 & 1-t\end{vmatrix} = (2-t)^2\big((1-t)^2-1\big) = (2-t)^2(t^2-2t) = -t(2-t)^3$$

$Spec(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}$, $\quad k_1 = 1, k_2 = 3$, $\dim E_0 = 1$, $1 \le \dim E_2 \le 3$

$E_{\lambda_1} = E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) :\ B + B^T = O\}$

Niech $B = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$B + B^T = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a & c\\b & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2a & = 0\\b + c & = 0\\2d & = 0\end{cases}$$

Zatem $B = \begin{bmatrix}0 & b\\-b & 0\end{bmatrix}$ oraz $E_0 = \left\{\begin{bmatrix}0 & b\\-b & 0\end{bmatrix} :\ b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{lin}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\right\}$

$E_{\lambda_2} = E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\cdot \mathrm{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) :\ B + B^T = 2B\}$

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a,b,c,d]_{\mathcal{B}},\ O_{2\times 2} = [0,0,0,0]_{\mathcal{B}}$

$$(A-2I)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c,\quad a,b,d \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} :\ a,b,d \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim E_2 = 3$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$