Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 12
Data: ....

EGZAMIN!

TEMAT: *Zagadnienie własne operatora liniowego* (*) Nauczyć się

10.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

Można nad $\mathbb{C}$

My robimy tylko nad $\mathbb{R}$

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową wymiaru n. Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni V nazywamy również *operatorami liniowymi*.

$\varphi : V \to V$

odpowiadają im macierze kwadratowe

Twierdzenie 10.1.1. i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru n^2.

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemiennego. bo $f \circ g \neq g \circ f$

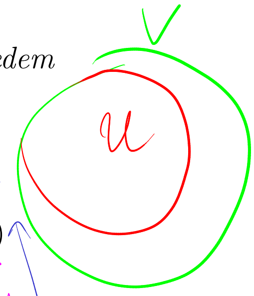
iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$

zgodność tych struktur

Dowód. i), ii) Wynikają z twierdzeń 8.3.1 oraz 8.3.2. iii) Wynika z odpowiednich związków dla macierzy odwzorowań $f, g, f \circ g, \alpha f, \alpha g$. □

Definicja 10.1.2. Podprzestrzeń liniową U przestrzeni V nazywamy *niezmienniczą względem endomorfizmu* $\varphi \in End(V)$ lub krótko *φ-niezmienniczą*, jeżeli

$U \subset V$

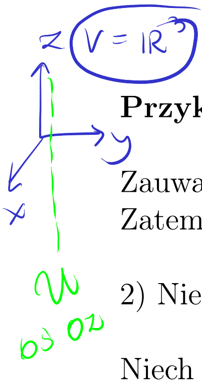


$$\varphi(U) \subset U, \quad tzn. \quad \forall u \in U \; \varphi(u) \in U.$$

$V = \mathbb{R}^3$

$\varphi : V \to V$

$a \in U \Rightarrow \varphi(a) \in U \qquad a \in U \subset V \quad \varphi(a) \in V$

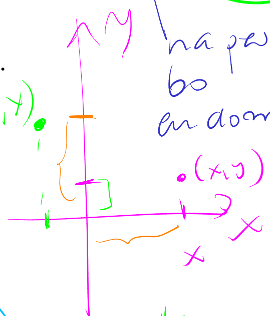


Przykład 10.1.3. 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

oś Oz

na pewno bo endomorfizm

Zauważmy, że φ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz.
Zatem dla $(0, 0, t) \in U$ mamy $\varphi(0, 0, t) = (0, 0, t) \in U$ i U jest φ-niezmiennicza.

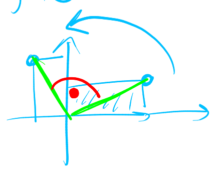


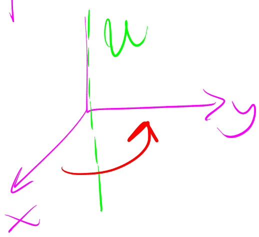
2) Niech V, $\varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \mathrm{Ker}\varphi$ dla odwz. lin zawsze

$u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ $\quad \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

Niech $u \in U$, wówczas $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$. Oczywiście $\mathbf{0}_V \in U$, bowiem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$.
Zatem U jest φ-niezmiennicza.

$(x, y) \circ (-y, x) = 0$

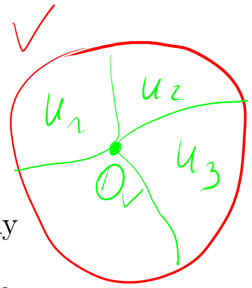




$\varphi : V \to V$

U_i – niezmiennicze

$x \in U_1 \quad \varphi(x) \in U_1$



Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

Dla dowolnego endomorfizmu $\varphi : V \to V$ i dla dowolnej podprzestrzeni $U \subset V$, mamy $\varphi(U) \subset V$.
Gdy U jest φ-niezmiennicza mamy $\varphi(U) \subset U$, zatem restrykcja $\varphi|_U : U \to U$, czyli $\varphi|_U \in End(U)$.

$\varphi|_{U_i}$

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Niech $\varphi \in End(V)$.

Definicja 10.1.4. ! i) Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu φ, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$. Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ.

z założenia niezerowy

ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu φ.

iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symbolem $Spec(\varphi)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

$f \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{df}{dx}$

Przykład 10.1.5. Niech $V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $\varphi = \frac{d}{dx}$, tzn. dla dowolnego $f \in V$ mamy $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$. Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora $\frac{d}{dx}$. Istotnie, niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Zdefiniujmy
$g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$. Oczywiście $g_\lambda \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Ponadto $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$. Zatem g_λ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Stąd $Spec(\varphi) = \mathbb{R}$.

$f')$

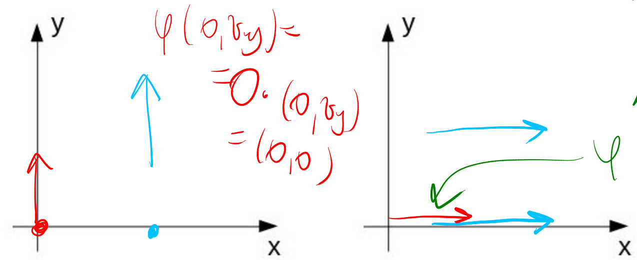
EIGENVECTOR

Uwaga 10.1.6. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

Dowód. Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ takie, że $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$. Wówczas $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v =$ $0 =$ $(\lambda_1 - \lambda_2)v$. Ponieważ $v \neq \mathbf{0}_V$, zatem $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

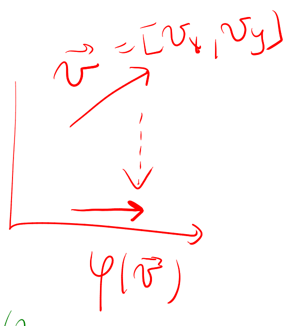
z def.

Przykład 10.1.7. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś Ox. Rozważ zagadnienie własne dla operatora φ.
Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co v. Zatem możliwe są dwie sytuacje:
1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = \mathbf{0}$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$



$\varphi(0, v_y) = 0 \cdot (0, v_y) = (0, 0)$

$\varphi(v_x, 0) = 1 \cdot (v_x, 0)$



$Spec(\varphi) = \{0, 1\}$

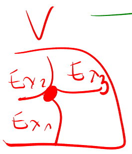
$\lambda_1 = 1 \sim [1, 0]$

$\lambda_2 = 0 \sim [0, 1]$

link na stronie !
EIGENFACE
Zastosowanie

Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu
Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczymy taką bazę przestrzeni liniowej V, że macierz endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ w tejże bazie będzie diagonalna.
Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych φ.
Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Niech $\varphi \in End(V)$ oraz $\lambda \in Spec(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ, uzupełniony o wektor zerowy. Zatem



EIGENSPACE
$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$
$v \in E_\lambda \wedge v \neq \vec{0}$ $\Rightarrow v$ wektor własny

Twierdzenie 10.1.8. i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ-niezmienniczą. $v \in E_\lambda \Rightarrow \varphi(v) \in E_\lambda$

$\varphi|_{E_{\lambda_i}}$

iii) $E_\lambda = \mathrm{Ker}\psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Dowód. i) Dla dowolnych $v, w \in E_\lambda$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy $\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w) = \alpha\lambda v + \beta\lambda w = \lambda(\alpha v + \beta w)$, czyli $\alpha v + \beta w \in E_\lambda$.
ii) Na mocy i) jeśli $v \in E_\lambda$, to $\varphi(v) = \lambda v \in E_\lambda$.
iii) $\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V(v) = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \underbrace{(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)}_{\psi}(v) = \mathbf{0}_V$
□

$v = \mathrm{id}(v)$

$\mathbb{R}^2$
$f(x,y) = (x,y)$
id

Definicja 10.1.9. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy *podprzestrzenią własną* endomorfizmu φ, odpowiadającą wartości własnej λ.

uwaga wcześniej

Uwaga 10.1.10. Na mocy uwagi 10.1.6 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in End(V)$, możemy badać jego restrykcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in End(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze E_{λ_i}, gdzie $\lambda_i \in Spec(\varphi)$.

Twierdzenie 10.1.11. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in Spec(\varphi)$ tzn. λ-wartość własna

↓ istnieje v: $v \neq 0$ $\varphi(v) = \lambda v$

ii) $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

układ nieoznaczony

iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

Dowód. i) $\Leftrightarrow$ ii) Jeśli $\lambda \in Spec(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$, czyli $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \lambda v = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v)$. Stąd $v \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$. I odwrotnie, jeśli $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v) = \mathbf{0}_V$, czyli $\varphi(v) = \lambda v$.
ii) $\Leftrightarrow$ iii) Niech $v \in V$ oraz niech X oznacza kolumnę współrzędnych wektora v w ustalonej bazie przestrzeni V. Niech A będzie macierzą φ w tejże bazie. Wówczas $\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = \mathbf{0}$. Układ jednorodny $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$ ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $\det(A - \lambda I) = 0$. □

$\varphi \sim A$

$(\overbrace{\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}}^{\psi})(v) = 0_V$

$\mathrm{Ker}\,\psi = ?$

$\underbrace{\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}}_{=0} \sim A - \lambda \cdot I$
$(A - \lambda I)X = 0$

Wniosek 10.1.12. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $\mathbf{0}_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \ldots, x_n]_\mathcal{B}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

$\det(A-\lambda I) = 0$ $\Downarrow$ $Spec(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ $\det(A-\lambda I)=0$

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

układ nieozn

X - rozwiązania $\ker(\varphi)$ $\varphi(X) = \lambda X$ $(A-\lambda I)X = 0$

ważne!

Twierdzenie 10.1.13. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V.

A $A' \sim \varphi$ $\det(A'-\lambda I) = 0 \iff \det(A-\lambda I) = 0$

Dowód. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ będą dwiema różnymi bazami przestrzeni V. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ oraz $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. Na mocy twierdzenia 9.2.1 mamy $A' = P^{-1}AP$. Ponadto $\det(A' - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) = \det\big(P^{-1}(A - \lambda I)P\big) = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I)$, bowiem $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det P}$. $\square$

Definicja 10.1.14. *Wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V. Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu χ_φ nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi* odwzorowania φ.

też z $K = \mathbb{R}$

Uwaga 10.1.15.

i) Rzeczywiste pierwiastki charakterystyczne wielomianu χ_φ to dokładnie wartości własne endomorfizmu φ.

ii) Na mocy twierdzenia 10.1.13 wielomian χ_φ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V.

iii) Jeśli $\dim V = n$, to wówczas $\deg \chi_\varphi = n$.

$\varphi: V \to V$ $\dim V = n$

$A = M_\varphi \sim \boxed{\ldots}_{n \times n}$

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Definicja 10.1.16.

i) *Wielomianem charakterystycznym* macierzy A nazywamy wielomian $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy A.

ii) Każdy rzeczywisty pierwiastek wielomianu χ_A nazywamy *wartością własną* macierzy A. Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy symbolem $Spec(A)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy *wektorem własnym* macierzy A, odpowiadającym wartości własnej λ.

Uwaga 10.1.17. Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{R}^n)$ są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, będącej reprezentacją macierzową odwzorowania φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową. Niech $\varphi \in End(V)$ oraz $\lambda \in Spec(\varphi)$.

Definicja 10.1.18.

i) Krotność k_λ liczby λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego χ_φ nazywamy *krotnością algebraiczną* wartości własnej λ.

ii) Wymiar $\dim E_\lambda$ podprzestrzeni własnej E_λ nazywamy *krotnością geometryczną* wartości własnej λ.

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy *prostymi*. Widmo składające się z n różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy *widmem prostym*.

Twierdzenie 10.1.19. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$ oraz niech A będzie reprezentacją macierzową φ w pewnej bazie przestrzeni V. Wówczas

krotność geom. nie przekracza

i) $1 \le \dim E_\lambda \le k_\lambda$, krotność alg. $E_\lambda = Ker(\varphi - \lambda \cdot I)$ podprzestrzeń bo jądro

ii) $\dim E_\lambda = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$. $\psi = \varphi - \lambda \cdot id$ $\psi: V \to V$ $\dim V = \dim Ker\psi + \dim Im\psi$ → ma bazę i wymiar

$\dim Ker\psi = \dim V - \dim Im\psi$

RANK NULLITY THM

Szkic dowodu. i) Jeśli $\lambda \in Spec(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $v \in E_\lambda$, zatem $1 \le \dim E_\lambda$. Rozumowanie uzasadniające, że $\dim E_\lambda \le k_\lambda$ można znaleźć w [4].
ii) Ponieważ $E_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$, zatem
$\dim E_\lambda = \dim V - \dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$. $\square$

$Ker\psi = E_\lambda$
$\dim Im\psi = r(A - \lambda I)$

Przykład 10.1.20. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu

$$\varphi \in End(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z).$$

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni.

$\mathcal{B}_k^3 = \{\hat{e}_1 = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(i) & \varphi(j) & \varphi(k) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\varphi(i) = \varphi(1,0,0) = (1,0,-2)$

$Ker\psi = Ker(\varphi - \lambda \cdot id)$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t) = 0$$

$t \cdot I = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$

ukł. nieoznaczony $= 0$

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ widmo proste
$E_{\lambda_3} = E_{-1} = ?$

$E_{\lambda_3} = Ker(\varphi - \lambda_3 I)$

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$t = -1$ ukł. nieozn. (wiem to)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y &= 0 \\ 3y &= 0 \\ -2x - 2y &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0,\ z \in \mathbb{R}$$

$(0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$

$(0,0,z) = z\cdot(0,0,1)$

I jawnie wyliczyć bazę E_{λ_3}

bo wektor własny z definicji niezerowy

Wektory własne odpowiadające $\lambda_3 = -1$ są postaci $v = (0,0,z)$, gdzie $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

dopuszczam $z=0$

$E_{-1} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(0,0,1)\}$ oraz $\dim E_{-1} = 1$

II

Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 10.1.19 ii), możemy obliczyć

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A+I) = 3 - r\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

$\dim \operatorname{Im}(A+I)$

tw. 10.1.19 b)

Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 10.1.19 i) mamy $1 \leq \dim E_{\lambda_3} \leq k_3 = 1$, zatem $\dim E_{\lambda_3} = 1$.

tw. a)

Analogicznie wyznaczamy E_{λ_1} oraz E_{λ_2}. Z góry wiemy, że $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

10.2 Diagonalizacja

Twierdzenie 10.2.1. Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in End(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Bez dowodu. Dowód można znaleźć w [4].

Twierdzenie 10.2.2. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$.

i) Jeśli φ ma widmo proste $Spec(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \ldots, v_n$, gdzie v_i odpowiada λ_i, dla $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, tworzą bazę przestrzeni V. (bo są lin. niezal.)

ii) Jeśli wektory własne $v_1, \ldots, v_n \in V$ endomorfizmu φ (nie koniecznie odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni V oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, to macierz przekształcenia φ w tejże bazie ma postać diagonalną

$\varphi(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$
$= \lambda_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_2$
$[\lambda_1, 0, 0 \ldots]$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots$ baza złożona z wł. wekt.
$\varphi : V \to V$
$\varphi(v_i) \in V$
$[\ldots]_{\mathcal{B}}$

iii) Jeśli wielomian charakterystyczny χ_φ rozkłada się na czynniki liniowe

$$\chi_\varphi = (t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\ldots(t-\lambda_p)^{k_p},$$

krot. alg. = krot. geom.

tw. spektralne

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$) i ponadto $k_i = \dim E_{\lambda_i}$, dla $i \in \{1,2\ldots,p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ.

Dowód. i) Wynika z twierdzenia 10.2.1.
ii) Jeśli $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, to wówczas $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1 = [\lambda_1, 0, 0\ldots, 0]_{\mathcal{B}}$, $\varphi(v_2) = \lambda_2 v_2 = [0, \lambda_2, 0\ldots, 0]_{\mathcal{B}}, \ldots, \varphi(v_n) = \lambda_n v_n = [0, 0\ldots, 0, \lambda_n]_{\mathcal{B}}$,

skąd $D = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$.
iii) Równość $k_i = \dim E_{\lambda_i}$ oznacza, że jeśli λ_i jest k_i-krotnym pierwiastkiem wielomianu χ_φ, to istnieje k_i liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających λ_i. Z kolei fakt, że χ_φ rozkłada się na iloczyn czynników liniowych, implikuje równość $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} = n = \dim V$. $\square$

Definicja 10.2.3. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ nazywamy *diagonalizowalnym*, gdy istnieje taka baza przestrzeni V, że macierz operatora φ w tejże bazie jest macierzą diagonalną.

Wniosek 10.2.4. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ.

$A' = P^{-1}AP$

Macierz diagonalizująca

Definicja 10.2.5. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy macierzą *diagonalizowalną*, gdy istnieje macierz nieosobliwa $P \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz P *diagonalizuje* macierz A.

$D = P^{-1}AP$ $\quad A' = D$ diagon.

Wniosek 10.2.6. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych A.

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ będzie pewną baza przestrzeni V oraz niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, dla pewnego $\varphi \in End(V)$. Załóżmy, że istnieje baza $\mathcal{B}'$ przestrzeni V, złożona z wektorów własnych φ. Oznaczmy $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$. Wówczas $A' = D = P^{-1}AP$, gdzie $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. $\square$

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

$\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$
$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liniowe

Przykład 10.2.7. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

$\ker\varphi = \ker(\varphi - t\cdot I)$ $\quad \Delta < 0$ $\quad A = M_\varphi(\mathcal{B}^2_k, \mathcal{B}^2_k)$

$(A - tI)x = 0$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 \neq 0.$$

wartości własne to te pierwiastki char. które są z ciała $K = \mathbb{R}$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $Spec(A) = \varnothing$ i macierz rzeczywista A nie jest diagonalizowalna.

$\mathcal{B}_k = \{i, j\} = \{(1,0), (0,1)\}$

Przykład 10.2.8. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1,1,1) = (-1,-1,-1)$, $\varphi(0,1,1) = (0,1,1)$, $\varphi(0,0,1) = (0,0,2)$ jest diagonalizowalny?

$(-1)\cdot v$ $\quad 1\cdot v$ $\quad \cdot 2 \cdot v$

$\varphi(v) = \lambda \cdot v$ $\to$ wzór $\to$ odwrotnie długie i żmudne

Odczytujemy wartości własne i wektory własne
$\lambda_1 = -1, v_1 = (1,1,1)$, $\lambda_2 = 1, v_1 = (0,1,1)$, $\lambda_3 = 2, v_1 = (0,0,1)$.

$Spec(\varphi) = \{-1, 1, 2\}$

Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 10.2.2 i), operator φ jest diagonalizowalny.

Przykład 10.2.9. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem
$\varphi(x, y, z) = (3x + 8z, 3x - y + 6z, -2x - 5z)$ jest diagonalizowalny?

tylko odpowiedź tak/nie ?

baza kanon.

$\mathcal{B}^3_k=(i,j,k)$ $\varphi(i)\ \varphi(j)\ \varphi(k)$ $\varphi(i)=\varphi(1,0,0)=(3,3,-2)$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^3_k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

wykorzystywać własności wyznaczników

$\det(A-tI)=$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$

$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3$

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\}$, $k_1 = 3$

E_{-1} $1 \le \dim E_{-1} \le k_{-1} = 3$

$Ker(\varphi - tI)$

$(A-tI)X=0$

$\det(A-tI)=0$

ukł. nieozn. → są niezerowe rozw.

$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \{v = (x,y,z) : (A+I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$\dim(\varphi-(-1)\cdot id)$ $\dim(\varphi+id)$

$$\dim E_{-1} = 3 - r(A+I) = 3 - r\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq k_1 = 3.$$

$\dim V = \dim \mathbb{R}$

Endomorfizm φ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych φ.

Wniosek 10.2.10. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V. Jeśli wektory własne $v_1 \ldots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = \big(v_1 \ldots, v_n\big)$ przestrzeni V, to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$\dim E_\lambda = k_\lambda$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B},\mathcal{B}) = PD^rP^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$\boxed{D = P^{-1}AP}$

$\varphi^r = \varphi\circ\ldots\circ\varphi$ $A^r = A\cdot\ldots\cdot A$

Dowód. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{B})$, $D = M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C})$ oraz $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$. Wówczas $A^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{B},\mathcal{B})$ oraz $D^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{C},\mathcal{C})$. Ponadto $D = P^{-1}AP$, skąd $A = PDP^{-1}$ oraz $A^r = (PDP^{-1})^r = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1})}_{r-razy} = PD(P^{-1}P)D\ldots(PP^{-1})DP^{-1} = PD^rP^{-1}$. $\square$

łączne I I element neutralny

$D^r = \begin{bmatrix} \lambda_1^r & & \\ & \lambda_2^r & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$

$D = P^{-1}AP$

$PDP^{-1} = A$

Przykład 10.2.11. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P. Oblicz $\varphi^{101}(1,2,3)$.

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^3_k) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ROZSĄDNIE!

$$0 = \chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{w_2+2w_3}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{k_3+k_2}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \overset{k_2+k_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 4-t & 2-t & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (4-t)(2-t)^2 - 3(2-t)^2 = (2-t)^2(1-t)$$

$Spec\varphi = \{\lambda_1 = 1 \lambda_2 = 2\}$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $\dim E_1 = 1$, $1 \leq \dim E_2 \leq 2$

φ będzie diagonalizowalny, jeśli $\dim E_2 = 2 = k_2$.

?

$$\dim E_2 = 3 - r(A-2I) = 3 - r\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

zatem φ jest diagonalizowalny.

Wyznaczymy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = 1$.

$(A - 1 \cdot I)$

$$(A - I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 2w_1]{w_2 - 3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -2z, z \in \mathbb{R}$$

$v_1 \sim \lambda_1 = 1$

$E_1 = \{(-2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(-2, -2, 1)\}$

Rozważmy $\lambda_2 = 2$.

$$(A - 2I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x + y - z = 0 \Rightarrow z = y - x$, $x, y \in \mathbb{R}$

$E_2 = \{(x, y, y - x) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \big(v_1 = (-2, -2, 1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (0, 1, 1)\big)$

$$D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ macierz diagonalizująca } P := P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

do bazy wekt. wł.

Obliczymy $\varphi^{101}(1, 2, 3)$ na dwa różne sposoby.

METODA I: Wykorzystamy macierz D. Niech $v := (1, 2, 3) = [a, b, c]_\mathcal{C}$.

$$\text{Wówczas} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ skąd } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$A^{101} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\mathcal{B}_4^3$ $\mathcal{B}_4^3$

$$\text{Obliczamy } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz } v = [2, 5, 6]_\mathcal{C}.$$

$X' = P^{-1} \cdot X$

$$D^{101}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \cdot 2^{101} \\ 6 \cdot 2^{101} \end{bmatrix}_\mathcal{C}$$

w bazie $\mathcal{C}$

$\varphi^{101}(v) = [2, 5 \cdot 2^{101}, 6 \cdot 2^{101}]_\mathcal{C} = 2v_1 + 5 \cdot 2^{101} v_2 + 6 \cdot 2^{101} v_3 =$

$= (-4 + 5 \cdot 2^{101}, -4 - 6 \cdot 2^{101}, 2 + 2^{101})$

$(1, 2, 3) = [\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{C}$

$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $X' = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_\mathcal{C}$

$P X' = X$ $\quad$ ćw: $X' = P^{-1} X$

METODA II: Obliczamy

$$A^{101}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = PD^{101}P^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \overset{P}{\begin{bmatrix}-2&1&0\\-2&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}}\overset{D^{101}}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^{101}&0\\0&0&2^{101}\end{bmatrix}}\overset{P^{-1}}{\begin{bmatrix}1&-1&1\\3&-2&2\\2&-1&2\end{bmatrix}}\overset{\cdot X}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}} =$$

$$\begin{bmatrix}3\cdot 2^{101}-2 & 2-2^{102} & 2^{102}-2\\ 2^{102}-2 & 2-2^{101} & 2^{102}-2\\ 1-2^{101} & -1+2^{101} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4+5\cdot 2^{101}\\ -4-6\cdot 2^{101}\\ 2+2^{101}\end{bmatrix}$$

Przykład 10.2.12. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu f w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.

$$f \in End(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

$f:(M_2,\mathcal{B}) \to (M_2,\mathcal{B})$

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right) \text{ baza } M_2(\mathbb{R})$$

$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix} \to [2,0,0,0]_{\mathcal{B}}$$

$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} = [0,1,1,0]_{\mathcal{B}}$$

$$f(E_{21}) = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$A = M_f(\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix}2-t&0&0&0\\0&1-t&1&\\0&1&1-t&\\0&&&2-t\end{vmatrix}$$

$$\chi_f(t) = \det(A - tI) = (2-t)\begin{vmatrix}1-t&1&0\\1&1-t&0\\0&0&2-t\end{vmatrix} = (2-t)^2\begin{vmatrix}1-t&1\\1&1-t\end{vmatrix} = (2-t)^2\big((1-t)^2-1\big) = (2-t)^2(t^2-2t) = -t(2-t)^3$$

$(-1)^2$

$Spec(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}$, $k_1 = 1, k_2 = 3$, $\dim E_0 = 1$, $1 \le \dim E_2 \le 3$

krotności algebr.

$1 \le \dim E_{\lambda_k} \le k_\lambda$

kr. geom kr. alg

$(A - 0\cdot I)X = 0$

$AX = 0$

X

$E_{\lambda_1} = E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) :\ B + B^T = O\}$ $\quad 1 \le \dim E_0 \le k_1 = 1$

Niech $B = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, gdzie $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$B + B^T = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2a &= 0\\ b+c &= 0\\ 2d &= 0\end{cases}$$

wektor własny odpow. $\lambda_1 = 0$

baza $E_0 = E_{\lambda_1}$

$\lambda_2 = 2$

Zatem $B = \begin{bmatrix}0&b\\-b&0\end{bmatrix}$ oraz $E_0 = \left\{\begin{bmatrix}0&b\\-b&0\end{bmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{lin}\left\{\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}$

$E_{\lambda_2} = E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\cdot \mathrm{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) :\ B + B^T = 2B\}$

$(A - 2\cdot I)X = 0$

$\lambda_1 = 0$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}(\varphi - 0\cdot id) = \ker\varphi$

tw. 10.2.2. (spektralne) $\exists\ F = \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\varphi(F) = 0\cdot F$

$A - tI$

$t = 2$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}},\ O_{2\times 2} = [0,0,0,0]_{\mathcal{B}}$$

$-b + c = 0$

$b - c = 0$

$$(A-2I)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c,\quad a, b, d \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R}\right\} = \text{lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

lin. niezal $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

baza E_2

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim E_2 = 3$

$\lambda = 0$ $\quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$\dim E_2 = k_2$

$\Downarrow$

A – diagonalizowalna

$\lambda = 2$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= M_\varphi(C, C)$

$\varphi(v) = \lambda \cdot v$

$\varphi\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2}\right) = \underbrace{2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{2 \cdot C_2} = [0, 2, 0, 0]_C$

macierz diagonalizująca

$C \qquad B$

$A' = Q^{-1} A P$

$P = Q$

$A' = P^{-1} A P$

$D = P^{-1} A P$

$A' = D$

żeby zapisać D

$\Downarrow$

ważne muszę znać P!

$(C_2\ C_3\ C_4\ C_1)$

$\varphi(C_2) = 2 \cdot C_2$

$[2\ 2\ 2\ 0]$