Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 14
Data: ....

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe*

12.1 Iloczyn skalarny i norma

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 12.1.1. Funkcję $s : V \times V \to \mathbb{R}$ nazywamy *iloczynem skalarnym*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w)$,

ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u)$,

ii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$.

Parę (V, s) nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*. Bywa ona oznaczana symbolem E. Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $u \circ v$ lub $\langle u, v \rangle$.

Przykład 12.1.2. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) *Standardowym iloczynem skalarnym w* $\mathbb{R}^n$ nazywamy $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taką, że
$\forall u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad u \circ v = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$
Przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \circ)$ oznaczamy symbolem $\mathbb{E}^n$.

2) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in V \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$

Całka oznaczona ma własność liniowości. Ponadto $\int_a^b f^2(x) dx \geq 0$, bowiem $f^2(x) \geq 0$ i całka oznaczona zachowuje nierówność słabą.

3) $V = \mathbb{R}_n[x], \quad \langle ., . \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$,
$\forall p, q \in V \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^n p(x_i) q(x_i)$, gdzie $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ liczby ustalone

Rozważmy $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wówczas $\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0$.
Jeśli $\langle p, p \rangle = 0$, to oczywiście $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Nie oznacza to jeszcze, że p jest wielomianem zerowym.

Niech $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Załóżmy, że $\langle p,p\rangle = 0$. Wówczas $p(x_0) = p(x_1) = \ldots = p(x_n) = 0$, skąd otrzymujemy $\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ & \ldots & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.
Wyznacznik główny W tego układu, to *wyznacznik Vandermonde'a*.
$W = \prod_{0\le i<j\le n}(x_j - x_i) \neq 0$, bowiem $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zatem jest to układ oznaczony jednorodny, jego jedynym rozwiązaniem jest $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, co oznacza, że p jest wielomianem zerowym.

4) $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\quad \langle .,.\rangle : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^T)$

Na mocy twierdzenia 3.1.13, mówiącego o własnościach śladu macierzy, można wywnioskować, że jest to iloczyn skalarny.

Twierdzenie 12.1.3. Niech (V, s) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w)$,

ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0$,

iii) $\forall u, v \in V \quad \Big(s(u, v)\Big)^2 \le s(u, u) \cdot s(v, v)$ *nierówność Schwarza*

Dowód. i) $s(u, \alpha v + \beta w) = s(\alpha v + \beta w, u) = \alpha s(v, u) + \beta s(w, u) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w)$
ii) Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $s(v, \mathbf{0}_V) = s(v, \alpha\mathbf{0}_V) = \alpha s(v, \mathbf{0}_V)$. Stąd $s(v, \mathbf{0}_V) = 0$.
iii) Załóżmy, że $v \neq \mathbf{0}_V$. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $s(u-\alpha v, u-\alpha v) \ge 0$. Równoważnie $s(u, u) - 2\alpha s(u, v) + \alpha^2 s(v, v) \ge 0$. Biorąc $\alpha = \frac{s(u,v)}{s(v,v)}$, otrzymujemy $s(u, u) - 2\frac{[s(u,v)]^2}{s(v,v)} + \frac{[s(u,v)]^2}{s(v,v)} \ge 0$. Stąd $s(u, u) + s(v, v) \ge [s(u, v)]^2$. $\square$

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Definicja 12.1.4. Funkcję $||.|| : V \to \mathbb{R}$ nazywamy *normą*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall v \in V \quad ||v|| \ge 0 \quad \wedge \quad ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$,

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$,

iii) $\forall u, v \in V \quad ||u + v|| \le ||u|| + ||v||$. tzw. warunek trójkąta

Liczbę $||v|| \ge 0$ nazywamy *normą (lub długością) wektora v*. Parę $(V, ||.||)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Twierdzenie 12.1.5. Jeśli (V, s) jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie $||.||_s : V \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\forall v \in V \quad ||v||_s = \sqrt{s(v,v)}$$

jest normą w przestrzeni V. Mówimy, że jest to *norma określona przez iloczyn skalarny.*

Dowód. Ponieważ dla dowolnego $v \in V$ mamy $s(v,v) \geq 0$ oraz $s(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$, zatem $||v||_s = \sqrt{s(v,v)} \geq 0$ oraz $||v||_s = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $||\alpha v||_s = \sqrt{s(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha^2 s(v,v)} = |\alpha|\sqrt{s(v,v)} = |\alpha| \cdot ||v||_s$. Ponadto na mocy nierówności Schwarza $||u+v||_s = s(u+v, u+v) = s(u,u) + 2s(u,v) + s(v,v) = ||u||_s^2 + 2s(u,v) + ||v||_s^2 \leq ||u||_s^2 + 2\sqrt{s(u,u)}\sqrt{s(v,v)} + ||v||_s^2 = ||u||_s^2 + 2||u||_s||v||_s + ||v||_s^2 = (||u||_s + ||v||_s)^2$, skąd otrzymujemy nierówność trójkąta. $\square$

Przykład 12.1.6. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^n$, tj. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mamy $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Jest to tzw. *norma euklidesowa* w $\mathbb{R}^n$.

Wniosek 12.1.7. Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną.

12.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.

Niech $(V, \langle ., . \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy *unormowanym* lub *wersorem.* Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować, tj. znaleźć wersor $\hat{v}$ o tym samym zwrocie i kierunku co v.
Istotnie $\hat{v} := \frac{v}{||v||}$ jest wersorem, bowiem $||\hat{v}|| = \left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \left|\frac{1}{||v||}\right| \cdot ||v|| = \frac{1}{||v||} \cdot ||v|| = 1$.

Miara kąta między wektorami
W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarza dla dowolnych $u, v \in V$ mamy
$|\langle u,v \rangle| \leq \sqrt{\langle u,u \rangle}\sqrt{\langle v,v \rangle} = ||u|| \cdot ||v|| \Rightarrow \frac{|\langle u,v \rangle|}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1$.
Jeśli $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$, możemy widzieć $\frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}$ jako cosinus jednoznacznie określonego kąta $\alpha \in [0, \pi]$. Definiujemy kąt między wektorami u i v jako α. Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}, \quad \measuredangle(u,v) = \arccos \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym $\mathbf{0}_V$ a innym wektorem jest nieokreślony.

Przykład 12.2.1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}_1[x], \langle .,. \rangle)$, gdzie $\langle p, q\rangle = p(0)q(0)+ p(1)q(1)$. Wyznaczymy miarę kąta pomiędzy wektorami $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$.

$\langle u, v\rangle = u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18$
$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$
$\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{18}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{41}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}}$

Definicja 12.2.2. i) Dwa wektory u, v nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$.

ii) Układ wektorów $\{v_1, \dots v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j\rangle = 0.$$

ii) Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}.$$

Uwaga 12.2.3. Wektor zerowy $\mathbf{0}_V$ jest ortogonalny do każdego wektora.

Przykład 12.2.4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R}), \langle .,. \rangle)$, gdzie $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sprawdzimy, czy wektory $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ są ortogonalne/ortonormalne.

$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}\big(-1 - (-1)\big) = 0$
$\langle f, f\rangle = ||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$
Wektory są ortogonalne, ale nie ortonormalne.

Twierdzenie 12.2.5 (Pitagorasa)**.** Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u, v \in V \quad u \perp v \Leftrightarrow ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

Dowód. $||u + v||^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \overset{\langle u,v\rangle=0}{=} ||u||^2 + ||v||^2$ $\square$

Twierdzenie 12.2.6. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Dowód. Załóżmy, że $\{v_1, \dots, v_k\}$ jest układem ortogonalnym oraz $\alpha_1 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = \mathbf{0}_V$, dla pewnych $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Dla dowolnego $j \in \{1, \dots, k\}$ mamy $0 = \langle \mathbf{0}_V, v_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle v_i, v_j\rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j\rangle = \alpha_j ||v_j||^2$. Ponieważ $v_j \neq \mathbf{0}_V$, zatem $||v_j|| \neq 0$ i stąd $\alpha_j = 0$. Jest to prawdą dla dowolnego j, zatem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ i układ jest liniowo niezależny. $\square$

Wniosek 12.2.7. i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

ii) W n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 12.2.8. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną (ortonormalną)* tej przestrzeni.

Przykład 12.2.9. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

MOTYWACJA: Przestrzeń $\mathbb{E}^3$
baza ortogonalna $\mathcal{B}_k^3 = \big(\hat{\imath} = (1,0,0), \hat{\jmath} = (0,1,0), \hat{k} = (0,0,1)\big)$
Dla dowolnego wektora $v = (v_x, v_y, v_z)$ mamy $v_x = v \circ \hat{\imath}$, $v_y = v \circ \hat{\jmath}$, $v_z = v \circ \hat{k}$.
Z dokładnością do znaku skalary v_x, v_y, v_z to długości rzutów ortogonalnych wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio, zaś wektory $v_x \cdot \hat{\imath}, v_y \cdot \hat{\jmath}, v_z \cdot \hat{k}$, to rzuty ortogonalne wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio.

Twierdzenie 12.2.10. Niech $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle .,. \rangle)$. Niech $v \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{||b_i||^2}.$$

Ponadto

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \frac{\langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle}{||b_1||^2} + \frac{\langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle}{||b_2||^2} + \ldots \frac{\langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle}{||b_n||^2}.$$

Dowód. Ponieważ $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$, zatem $\langle v, b_1 \rangle = \langle \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n, b_1 \rangle = \alpha_1 \langle b_1, b_1 \rangle + \alpha_2 \langle b_2, b_1 \rangle + \ldots \alpha_n \langle b_n, b_1 \rangle = \alpha_1 ||b_1||^2$. Stąd $\alpha_1 = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{||b_1||^2}$. Analogiczne rachunki przeprowadzamy dla $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Jeśli $v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle}{||b_i||^2} b_i$, $w = \sum_{i=1}^n \frac{\langle w, b_i \rangle}{||b_i||^2} b_i$, to wówczas $\langle v, v \rangle = \big\langle \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle}{||b_i||^2} b_i, \sum_{j=1}^n \frac{\langle w, b_j \rangle}{||b_j||^2} b_j \big\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{||b_i||^2 ||b_j||^2} \langle v, b_i \rangle \langle w, b_j \rangle \langle b_i, b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{||b_i||^4} \langle v, b_i \rangle \langle w, b_i \rangle ||b_i||^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle \langle w, b_i \rangle}{||b_i||^2}$ $\square$

Wniosek 12.2.11. Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle .,. \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \alpha_i = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \ldots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$

Dowód. Wystarczy w twierdzeniu 12.2.10 przyjąć $||b_i|| = 1$. $\square$

Wniosek 12.2.12. Niech $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle ., . \rangle)$ oraz niech $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \ldots + \alpha_n\beta_n$.

Dowód. Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{i=1}^n \beta_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i, b_j \rangle$ równa się $\sum_i^n \alpha_i \beta_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \ i \neq j \\ 1 & ; \ i = j \end{cases}$. $\square$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 15
Data: ....

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe - ciąg dalszy*

13.1 Metody ortogonalizacji

Twierdzenie 13.1.1. Niech $(V, \langle ., . \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\{b_1, \ldots b_m\} \subset V$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny $\{c_1, \ldots c_m\} \subset V$ taki, że $\mathrm{lin}\{b_1, \ldots b_m\} = \mathrm{lin}\{c_1, \ldots c_m\}$.

Bez dowodu. Metoda dowodowa jest analogiczna do tej przedstawionej w przykładzie 13.1.3 poniżej.

Wniosek 13.1.2. i) Każda skończenie wymiarowa przestrzeń euklidesowa rożna od $\{\mathbf{0}\}$ ma bazę ortogonalną i ortonormalną.

ii) W przestrzeni euklidesowej skończenie wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Dowód. i) Na mocy twierdzenia 7.2.23 i) skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa rożna od $\{\mathbf{0}\}$ ma bazę. Na mocy twierdzenia 13.1.1, bazę tę można zortogonalizować. Ponadto możemy unormować wektory otrzymanej bazy ortogonalnej.
ii) Na mocy wniosku 12.2.7 układ ortonormalny jest liniowo niezależny. Na mocy twierdzenia 7.2.23 iii) układ liniowo niezależny może być uzupełniony do bazy. $\square$

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Przykład 13.1.3. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$, tj. $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dana jest baza $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4)\big)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B}$.

Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.
Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = (1, -2, 0)$. Wówczas oczywiście $\mathrm{lin}\{c_1\} = \mathrm{lin}\{b_1\}$.

II KROK: Aby zagwarantować, że $\mathrm{lin}\{c_1, c_2\} = \mathrm{lin}\{b_1, b_2\}$, poszukujemy c_2 w postaci $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzemy α w taki sposób, by $c_2 \circ c_1 = 0$.
Obliczamy $c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_2 \circ c_1)$.

Aby $c_2 \circ c_1 = 0$, wystarczy przyjąć $\alpha = -\frac{b_2 \circ c_1}{c_1 \circ c_1}$.
W naszym przykładzie $0 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_2 \circ c_1) = (5,5,1) \circ (1,-2,0) + \alpha \cdot (1,-2,0) \circ (1,-2,0) = -5 + 5\alpha$, skąd $\alpha = 1$. Zatem $c_2 = b_2 + c_1 = (6,3,1)$.

III KROK: Aby zagwarantować, że $\operatorname{lin}\{c_1, c_2, c_3\} = \operatorname{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$, poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, dla pewnych $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzemy β_1, β_2 w taki sposób, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.
Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2$, skąd $\beta_1 = -\frac{b_3 \circ c_1}{||c_1||^2}$. Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2$, skąd $\beta_2 = -\frac{b_3 \circ c_2}{||c_2||^2}$.

W naszym przykładzie $\begin{cases} 0 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2 = (5,4,4) \circ (1,-2,0) + \beta_1 (1+4+0) = -3 + 5\beta_1 \\ 0 = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2 = (5,4,4) \circ (6,3,1) + \beta_2 (36+9+1) = 46 + 46\beta_2 \end{cases}$.
Skąd $\beta_1 = \frac{3}{5}$, $\beta_2 = -1$.
Zatem $c_3 = b_3 + \frac{3}{5} c_1 - c_2 = (5,4,4) + \frac{3}{5}(1,-2,0) - (6,3,1) = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)$.
$\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,-2,0), c_2 = (6,3,1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)\big)$ jest bazą ortogonalną.

Ponieważ $||c_1|| = \sqrt{5}$, $||c_2|| = \sqrt{46}$, $||c_3|| = \sqrt{\frac{46}{5}}$, zatem bazą ortonormalną jest
$\mathcal{C}' = \Big(c_1' = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1,-2,0), c_2' = \frac{c_2}{||c_2||} = \frac{1}{\sqrt{46}} \cdot (6,3,1), c_3' = \frac{c_3}{||c_3||} = \sqrt{\frac{5}{46}} \cdot (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)\Big)$.

Wniosek 13.1.4. Jeśli $\mathcal{B} = \Big(b_1, b_2, \ldots, b_n\Big)$ jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle .,. \rangle)$, to wówczas ciąg wektorów $\mathcal{C} = \big(c_1, c_2, \ldots, c_n\big)$, zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \qquad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 \qquad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{||c_2||^2} c_2 \quad \ldots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{||c_i||^2} c_i$$

Przykład 13.1.5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B} = \big(1, x, x^2\big)$.

Niech $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$. Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_3 = 1 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 2 \neq 0$.
Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = 1$.

II KROK: Poszukujemy $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $c_2 \circ c_1 = 0$.
Obliczamy $0 = c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_2 \circ c_1) = (-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \alpha (1+1+1) = 3\alpha$.
Skąd $\alpha = 0$. Zatem $c_2 = b_2 = x$. (Mogliśmy to zauważyć wcześniej.)

III KROK: Poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzmy β_1, β_2 tak, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.
Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2 = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \beta_1 \cdot 3$, skąd $\beta_1 = -\frac{2}{3}$.
Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2 = (1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) + \beta_2 \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 1^2) = 2\beta_2$, skąd $\beta_2 = 0$.
Zatem $c_3 = b_3 - \frac{2}{3} c_1 = x^2 - \frac{2}{3}$.
$\mathcal{C} = \left(c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x^2 - \frac{2}{3}\right)$ jest bazą ortogonalną.

$||c_1|| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $||c_2|| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$, $||c_3|| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
Bazą ortonormalną jest układ wektorów
$\mathcal{C}' = \left(c_1' = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c_2' = \frac{c_2}{||c_2||} = \frac{\sqrt{2}}{2} x, c_3' = \frac{c_3}{||c_3||} = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2} x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Macierzowa metoda ortogonalizacji

Twierdzenie 13.1.6. Niech $u_1, \ldots, u_m$ będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów $u_1, \ldots, u_m$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej $[AA^T|A]$, można doprowadzić ją do postaci $[G|A']$, gdzie $G \in M_m(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy $A' \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne w $\mathbb{E}^n$.

Bez dowodu. Dowód można znaleźć w [4].

Przykład 13.1.7. Stosując metodę macierzową, zortogonalizujemy układ wektorów $b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4)$ w przestrzeni $\mathbb{E}^3$.

Układ ten jest liniowo niezależny, bowiem $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$.

Układ ten nie jest ortogonalny, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.

$$\begin{array}{rrr|rrr} & & & 1 & 5 & 5 \\ & & & -2 & 5 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 5 & -5 & -3 \\ 5 & 5 & 1 & -5 & 51 & 49 \\ 5 & 4 & 4 & -3 & 49 & 57 \end{array} \qquad A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 51 & 49 \\ -3 & 49 & 57 \end{bmatrix}$$

$$[A \cdot A^T|A] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 51 & 49 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & 49 & 57 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + \frac{3}{5} w_1]{w_2 + w_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 46 & \frac{276}{5} & \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2}$$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{46}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 3 \end{array}\right]$$

Układ ortogonalny $c_1 = (1, -2, 0), c_2 = (6, 3, 1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 3)$.

Jeśli nie używaliśmy operacji $\alpha \cdot w_i$, to na przekątnej macierzy G otrzymujemy $||c_1||^2, ||c_2||^2, ||c_3||^2$. Zatem $||c_1|| = \sqrt{5}, ||c_2|| = \sqrt{46}, ||c_3|| = \sqrt{\frac{46}{5}}$.

13.2 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń

Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, zaś $S \subset V$ dowolnym podzbiorem.

Definicja 13.2.1. Zbiór $S^{\perp} := \{v \in V : \forall x \in S \ \langle v, x \rangle = 0\}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym zbioru* S w przestrzeni euklidesowej V. Jeżeli zbiór S jest jednoelementowy tj. $S = \{x\}$, to zbiór $S^{\perp}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym wektora* $x \in V$.

Twierdzenie 13.2.2. Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

i) Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, to wówczas $U^{\perp}$ również jest podprzestrznią liniową.

ii) Dla dowolnego wektora $u \in V$ zbiór $\{u\}^{\perp}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

Dowód. i) Niech $x, y \in U^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas dla dowolnego $w \in U$ mamy $\langle \alpha x + \beta y, w \rangle = \alpha \langle x, w \rangle + \beta \langle y, w \rangle = 0$. Zatem $\alpha x + \beta y \in U^{\perp}$.
ii) Niech $x, y \in \{u\}^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas $\langle \alpha x + \beta y, u \rangle = \alpha \langle x, u \rangle + \beta \langle y, u \rangle = 0$. Zatem $\alpha x + \beta y \in \{u\}^{\perp}$. $\square$

Przykład 13.2.3. W przestrzeni $\mathbb{E}^4$ wyznaczymy wszystkie wektory v ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$.

Niech $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Wówczas $u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$. Zatem $v = (x, y, -x, t)$ oraz $\{u\}^{\perp} = \{(x, y, -x, t) : \ x, y, t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Definicja 13.2.4. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Jeśli $w \in U^{\perp}$, to mówimy, że wektor w jest *ortogonalny do podprzestrzeni* U i piszemy $w \perp U$.

Uwaga 13.2.5. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora $w \in V$

$$w \perp U \ \Leftrightarrow \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} \quad w \perp b_i$$

Dowód. Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. Ponadto jeśli dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy $\langle w, b_i \rangle = 0$, to wówczas dla dowolnego $u \in U, u = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$ mamy $\langle w, u \rangle = \alpha_1 \langle w, b_1 \rangle + \ldots + \alpha_n \langle w, b_n \rangle = 0$. Zatem $w \perp U$. $\square$

Przykład 13.2.6. Rozważmy $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, podprzestrzeń $U = \mathbb{R}_1[x]$ oraz $w = 6x^2 - 6x + 1$. Czy $w \perp U$?

$w \perp U = \mathbb{R}_1[x] = \text{lin}\{1, x\} \Leftrightarrow w \perp 1 \wedge w \perp x$
$\langle w, 1 \rangle = \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = 2x^3 - 3x^2 + x\Big|_0^1 = 0$
$\langle w, x \rangle = \int_0^1 (6x^3 - 6x^2 + x)dx = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = 0$ Zatem $w \perp U$.

Własności dopełnienia ortogonalnego

Twierdzenie 13.2.7. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U, U_1, U_2 jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

i) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^{\perp} \subset U_1^{\perp}$,

ii) $U^{\perp} = (\mathrm{lin}U)^{\perp}$,

iii) $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$.

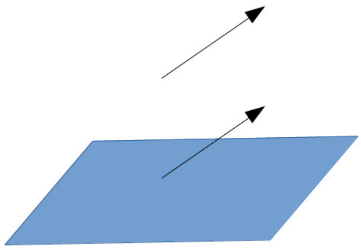
Dowód. i) $x \in U_2^{\perp} \Leftrightarrow \forall y \in U_2 \ x \perp y \overset{U_1 \subseteq U_2}{\Rightarrow} \forall y \in U_1 \ x \perp y \Leftrightarrow x \in U_1^{\perp}$
ii) Wynika z uwagi 13.2.5.
iii) Niech $u \in U$. Wówczas $\langle u, x \rangle = 0$ dla dowolnego $x \in U^{\perp}$. Stąd $u \perp x$ dla dowolnego $x \in U^{\perp}$, czyli $x \in$. $\square$

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową.

Definicja 13.2.8. Operator liniowy $\pi \in End(V)$ dany wzorem

$$\forall v \in V \ \pi(v) = u, \quad \text{gdzie} \quad v - u \perp U,$$

nazywamy *rzutowaniem ortogonalnym* lub *projekcją ortogonalną* na podprzestrzeń U. Obraz wektora v poprzez π nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U.



Twierdzenie 13.2.9 (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego)**.** Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny $u \in U$ tego wektora na podprzestrzeń U.

i) Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$ jest dowolną bazą podprzestrzeni U, wówczas $u = \pi(v) = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$, gdzie

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \ldots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \ldots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \ldots & & \ldots & \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \ldots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \langle v, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k \rangle \end{bmatrix}. \tag{1}$$

ii) Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$ jest bazą ortogonalną, wówczas rzut ten określony jest wzorem

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{||b_1||^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2 \rangle}{||b_2||^2} b_2 + \ldots + \frac{\langle v, b_k \rangle}{||b_k||^2} b_k.$$

iii) Jeśli baza $\mathcal{B}$ jest bazą ortonormalną, wówczas

$$u = \pi(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + \ldots + \langle v, b_k\rangle b_k.$$

Dowód. Jeśli $u = \pi(v)$, to $v - u \perp U$, co na mocy uwagi 13.2.5 jest równoważne $v - u \perp b_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Zatem $\langle v - u, b_i\rangle = 0$ lub równoważnie $\langle v, b_i\rangle = \langle u, b_i\rangle$. Ponieważ $u \in U$, zatem istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in R$ takie, że $u = [\alpha_1, \ldots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$.
i) Otrzymujemy układ równań $\langle v, b_i\rangle = \langle u, b_i\rangle = \langle \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k, b_i\rangle = \alpha_1\langle b_1\rangle + \ldots + \alpha_k\langle b_k, b_i\rangle$, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, który jest równoważny układowi (1).
ii) Na mocy twierdzenia 12.2.10 mamy $\alpha_i = \frac{\langle v, b_i\rangle}{||b_i||^2}$.
iii) Na mocy wniosku 12.2.11 mamy $\alpha_i = \langle v, b_i\rangle$. $\square$

Macierz $\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \langle b_1, b_2\rangle & \ldots & \langle b_1, b_k\rangle \\ \langle b_2, b_1\rangle & \langle b_2, b_2\rangle & \ldots & \langle b_2, b_k\rangle \\ \ldots & & \ldots & \\ \langle b_k, b_1\rangle & \langle b_k, b_2\rangle & \ldots & \langle b_k, b_k\rangle \end{bmatrix}$ występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy *macierzą Grama* układu wektorów $\big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$.

Przykład 13.2.10. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^4$ wyznaczymy rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, 1, 0)$ na podprzestrzeń $U = \text{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest bazą U, bowiem $r\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

METODA I
$u := \pi_U(v) =?$, $\quad w := v - u \perp U \Leftrightarrow w \perp b_1 := (2, 1, 1, 2) \wedge w \perp b_2 := (1, 1, -3, 0)$
$u \in U$, zatem istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $u = \alpha b_1 + \beta b_2$. Wówczas
$w = (1, 1, 1, 0) - \alpha(2, 1, 1, 2) - \beta(1, 1, -3, 0) = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha)$

Otrzymujemy układ dwóch równań
$0 = \langle w, b_1\rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (2, 1, 1, 2) = 4 - 10\alpha$,
$0 = \langle w, b_2\rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 - 11\beta$.
Stąd $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = -\frac{1}{11}$ oraz
$u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}} = [\frac{2}{5}, -\frac{1}{11}]_{\mathcal{B}} = \frac{2}{5}b_1 - \frac{1}{11}b_2 = \big(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\big) - \big(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, 0\big) = \big(\frac{39}{55}, \frac{17}{55}, \frac{37}{55}, \frac{4}{5}\big)$

METODA II
Zauważmy, że baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest ortogonalna.
Istotnie $b_1 \circ b_2 = (2, 1, 1, 2) \circ (1, 1, -3, 0) = 0$. Na mocy twierdzenia 12.2.10 mamy $u = \left[\frac{\langle u, b_1\rangle}{||b_1||^2}, \frac{\langle u, b_2\rangle}{||b_2||^2}\right]$. Ale $\langle v, b_i\rangle = \langle u, b_i\rangle$, zatem $u = \left[\frac{\langle v, b_1\rangle}{||b_1||^2}, \frac{\langle v, b_2\rangle}{||b_2||^2}\right]$. Obliczamy $\langle v, b_1\rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (2, 1, 1, 2) = 4$, $\langle v, b_2\rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (1, 1, -3, 0) = -1$ oraz $||b_1||^2 = 10$, $||b_2||^2 = 11$. Stąd $u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}$.

UWAGA: Gdyby baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ nie była ortogonalna, zawsze możemy metodą Grama-Schmidta ją zortogonalizować i w dalszych rachunkach wykorzystać znalezioną bazę ortogonalną $\mathcal{C} := (c_1, c_2)$.

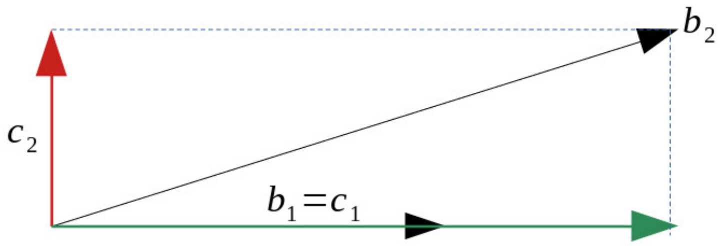
Interperatacja geometryczna metody Grama-Schmidta
Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$ i jej bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ będzie szukaną bazą ortogonalną.

KROK I:

$$c_1 := b_1$$

KROK II:

$$c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1\rangle}{||c_1||^2} c_1 = b_2 - \pi_{\mathrm{lin}\{c_1\}}(b_1)$$



KROK III:

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1\rangle}{||c_1||^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2\rangle}{||c_2||^2} c_2 = b_3 - \pi_{\mathrm{lin}\{c_1\}}(b_3) - \pi_{\mathrm{lin}\{c_2\}}(b_3) = b_3 - \pi_{\mathrm{lin}\{c_1, c_2\}}(b_3)$$