

TEMAT: *Przestrzeń euklidesowa*

## 12.1 Iloczyn skalarny i norma

Niech  $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$  będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

**Definicja 12.1.1.** Funkcję  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy *iloczynem skalarnym*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i)  $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w)$ ,  
*↓ liniowość na brzo zmierzając*

ii)  $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u)$ , *symetryczne*

iii)  $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$ . *|| niżej dependencja*

Parę  $(V, s)$  nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*. Bywa ona oznaczana symbolem  $E$ . Zamiast  $s(u, v)$  będziemy również pisać  $u \circ v$  lub  $\langle u, v \rangle$ .

**Przykład 12.1.2.** Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) *Standardowym iloczynem skalarnym* w  $\mathbb{R}^n$  nazywamy  $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $\forall u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad u \circ v = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ . Przestrzeń euklidesową  $(\mathbb{R}^n, \circ)$  oznaczamy symbolem  $\mathbb{E}^n$ .

2)  $V = C([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in V \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Całka oznaczona ma własność liniowości. Ponadto  $\int_a^b f^2(x)dx \geq 0$ , bowiem  $f^2(x) \geq 0$  i całka oznaczona zachowuje nierówność słabą.

3)  $V = \mathbb{R}_n[x], \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R},$   
 $\forall p, q \in V \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^n p(x_i)q(x_i)$ , gdzie  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  liczby ustalone

Rozważmy  $\mathbb{R}_2[x]$  z iloczynem skalarnym  $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ . Wówczas  $\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0$ .  
 Jeśli  $\langle p, p \rangle = 0$ , to oczywiście  $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$ . Nie oznacza to jeszcze, że  $p$  jest wielomianem zerowym.

$\mathbb{R}^3$

$\|e\| = 1$   
 $\|j\| = 1$   
 $\|k\| = 1$

$i + j$   
 $j + k$   
 $i + k$

$\mathbb{R}^3$

$B = \{(1,1,0) \mid (0,1,0) \mid (0,0,1)\}$   
*i+j, j, k*

$\langle u/v \rangle$   
 $(u/v)$   
 $(u/v)$

$\mathbb{R}^3$

$(u_x, u_y, u_z) \circ (v_x, v_y, v_z)$   
 $= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

$\vec{u} \circ \vec{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = |\vec{u}|^2 \geq 0$

Niech  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ . Załóżmy, że  $\langle p, p \rangle = 0$ . Wówczas  $p(x_0) = p(x_1) =$

$$\dots = p(x_n) = 0, \text{ skąd otrzymujemy } \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik główny  $W$  tego układu, to *wyznacznik Vandermonde'a*.

$W = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$ , bowiem  $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$ . Zatem jest to układ oznaczony jednorodny, jego jedynym rozwiązaniem jest  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ , co oznacza, że  $p$  jest wielomianem zerowym.

4)  $V = M_{m \times n}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$

$\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$

*slad (suma elem. na przekątnej)*

$\text{tr}(A+B) = \text{tr}A + \text{tr}B$

Na mocy twierdzenia 3.1.13, mówiącego o własnościach śladu macierzy, można wywnioskować, że jest to iloczyn skalarny.

$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \cdot \text{tr}(A)$

**Twierdzenie 12.1.3.** Niech  $(V, s)$  będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

i)  $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w),$

ii)  $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0,$

iii)  $\forall u, v \in V \quad (s(u, v))^2 \leq s(u, u) \cdot s(v, v)$  *nierówność Schwarz'a*

*lin. i zm. sym*  
 $s(\alpha u_1 + \beta u_2, v) \stackrel{\text{sym}}{=} s(v, \alpha u_1 + \beta u_2)$   
 $= \alpha s(v, u_1) + \beta s(v, u_2)$   
 $= \alpha \cdot s(v, u_1) + \beta s(v, u_2)$

*Dowód.* i)  $s(u, \alpha v + \beta w) = s(\alpha v + \beta w, u) = \alpha s(v, u) + \beta s(w, u) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w)$

ii) Dla dowolnego  $\alpha \in \mathbb{R}$  mamy  $s(v, \mathbf{0}_V) = s(v, \alpha \mathbf{0}_V) = \alpha s(v, \mathbf{0}_V)$ . Stąd  $s(v, \mathbf{0}_V) = 0$ .

iii) Załóżmy, że  $v \neq \mathbf{0}_V$ . Dla dowolnego  $\alpha \in \mathbb{R}$  mamy  $s(u - \alpha v, u - \alpha v) \geq 0$ . Równoważnie  $s(u, u) - 2\alpha s(u, v) + \alpha^2 s(v, v) \geq 0$ . Biorąc  $\alpha = \frac{s(u, v)}{s(v, v)}$ , otrzymujemy  $s(u, u) - 2 \frac{s(u, v)^2}{s(v, v)} + \frac{s(u, v)^2}{s(v, v)} \geq 0$ . Stąd  $s(u, u) + s(v, v) \geq [s(u, v)]^2$ .  $\square$

Niech  $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$  będzie przestrzenią liniową.

**Definicja 12.1.4.** Funkcję  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy *normą*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i)  $\forall v \in V \quad \|v\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V,$

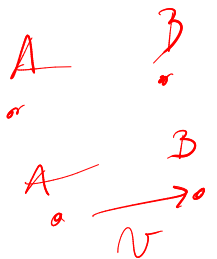
ii)  $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|,$

iii)  $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  *tzw. warunek trójkąta*

Liczbę  $\|v\| \geq 0$  nazywamy *normą (lub długością) wektora v*. Parę  $(V, \|\cdot\|)$  nazywamy *przestrzenią unormowaną*.



$d(A, B)$



$\|v\|$

$\mathbb{R}^3$   $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$   
 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = |\vec{u}|$

**Twierdzenie 12.1.5.** Jeśli  $(V, s)$  jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie  $\|\cdot\|_s : V \rightarrow \mathbb{R}$  dane wzorem

$$\forall v \in V \quad \|v\|_s = \sqrt{s(v, v)}$$

$|\vec{v}| = \sqrt{v \cdot v}$

jest normą w przestrzeni  $V$ . Mówimy, że jest to norma określona przez iloczyn skalarny.

*Dowód.* Ponieważ dla dowolnego  $v \in V$  mamy  $s(v, v) \geq 0$  oraz  $s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$ , zatem  $\|v\|_s = \sqrt{s(v, v)} \geq 0$  oraz  $\|v\|_s = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$ . Dla dowolnego  $\alpha \in \mathbb{R}$  mamy  $\|\alpha v\|_s = \sqrt{s(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha^2 s(v, v)} = |\alpha| \sqrt{s(v, v)} = |\alpha| \cdot \|v\|_s$ . Ponadto na mocy nierówności Schwarz'a  $\|u + v\|_s^2 = s(u + v, u + v) = s(u, u) + 2s(u, v) + s(v, v) = \|u\|_s^2 + 2s(u, v) + \|v\|_s^2 \leq \|u\|_s^2 + 2\sqrt{s(u, u)}\sqrt{s(v, v)} + \|v\|_s^2 = (\|u\|_s + \|v\|_s)^2$ , skąd otrzymujemy nierówność trójkąta.  $\square$

**Przykład 12.1.6.** Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{E}^n$ , tj.  $\mathbb{R}^n$  ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  mamy  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ . Jest to tzw. norma euklidesowa w  $\mathbb{R}^n$ .

**Wniosek 12.1.7.** Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną.

## 12.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.

Niech  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  będzie przestrzenią euklidesową. Wektor  $v \in V$ , którego długość jest równa 1 nazywamy unormowanym lub wersorem. Każdy wektor  $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$  można unormować, tj. znaleźć wersor  $\hat{v}$  o tym samym zwrocie i kierunku co  $v$ .

Istotnie  $\hat{v} := \frac{v}{\|v\|}$  jest wersorem, bowiem  $\|\hat{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$ .

### Miara kąta między wektorami

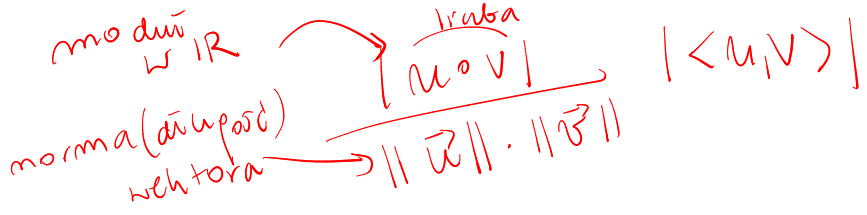
W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarz'a dla dowolnych  $u, v \in V$  mamy

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|u\| \cdot \|v\| \Rightarrow \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Jeśli  $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$ , możemy widzieć  $\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$  jako cosinus jednoznacznie określonego kąta  $\alpha \in [0, \pi]$ . Definiujemy kąt między wektorami  $u$  i  $v$  jako  $\alpha$ . Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}, \quad \angle(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym  $\mathbf{0}_V$  a innym wektorem jest nieokreślony.



tw. 12.1.3  
 (iii)

**Przykład 12.2.1.** Rozważmy przestrzeń euklidesową  $(\mathbb{R}_1[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , gdzie  $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ . Wyznaczymy miarę kąta pomiędzy wektorami  $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$ .

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18 \\ \|u\| &= \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ \|v\| &= \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \\ \angle(u, v) &= \arccos \frac{18}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}} \end{aligned}$$

$u \perp v$   
 $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

$\|u\| \|v\| \cos \alpha = 0$

**Definicja 12.2.2.** i) Dwa wektory  $u, v$  nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas  $u \perp v$ .

ii) Układ wektorów  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

ii) Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

wersory

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2$

**Uwaga 12.2.3.** Wektor zerowy  $0_V$  jest ortogonalny do każdego wektora.

**Przykład 12.2.4.** Rozważmy przestrzeń euklidesową  $(\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , gdzie  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ . Sprawdźmy, czy wektory  $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$  są ortogonalne/ortonormalne.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{4} \cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}(-1 - (-1)) = 0 \\ \langle f, f \rangle &= \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

Wektory są ortogonalne, ale nie ortonormalne.

$\int_{-\pi}^{\pi} f$

**Twierdzenie 12.2.5** (Pitagorasa). Niech  $V$  będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u, v \in V \quad u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

$$\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

Dowód.  $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \stackrel{\langle u, v \rangle = 0}{=} \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \square$

$(u+v) \cdot w$   
 $u \cdot w + v \cdot w$

**Twierdzenie 12.2.6.** Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Dowód. Załóżmy, że  $\{v_1, \dots, v_k\}$  jest układem ortogonalnym oraz  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$ , dla pewnych  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ . Dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, k\}$  mamy  $0 = \langle 0_V, v_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle = \alpha_j \|v_j\|^2$ . Ponieważ  $v_j \neq 0_V$ , zatem  $\|v_j\| \neq 0$  i stąd  $\alpha_j = 0$ . Jest to prawdą dla dowolnego  $j$ , zatem  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$  i układ jest liniowo niezależny.  $\square$

Analiza 11) sem. szereg Fouriera



**Wniosek 12.2.7.** i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

ii) W  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż  $n$  wektorów.

**Definicja 12.2.8.** Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną (ortonormalną)* tej przestrzeni.

**Przykład 12.2.9.** W przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ .

$\mathbb{R}^3$  (u*ł*o*z*enie)  
ortonormalna

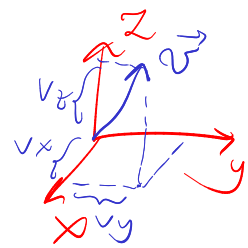
**Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej**

MOTYWACJA: Przestrzeń  $\mathbb{E}^3$

baza ortogonalna  $\mathcal{B}_k^3 = (\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1))$

Dla dowolnego wektora  $v = (v_x, v_y, v_z)$  mamy  $v_x = v \circ \hat{i}, v_y = v \circ \hat{j}, v_z = v \circ \hat{k}$ .

Z dokładnością do znaku skalary  $v_x, v_y, v_z$  to długości rzutów ortogonalnych wektora  $v$  na osie  $Ox, Oy, Oz$  odpowiednio, zaś wektory  $v_x \cdot \hat{i}, v_y \cdot \hat{j}, v_z \cdot \hat{k}$ , to rzuty ortogonalne wektora  $v$  na osie  $Ox, Oy, Oz$  odpowiednio.



**Twierdzenie 12.2.10.** Niech  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Niech  $v \in V, v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$ . Wówczas

$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}$   
 $\langle v, b_1 \rangle = \langle \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n, b_1 \rangle = \alpha_1 \langle b_1, b_1 \rangle + \alpha_2 \langle b_2, b_1 \rangle + \dots$   
 Ponadto

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$   
 $\vec{v} \circ \hat{i} = \vec{v} \cdot (1, 0, 0) = v_x$   
 $\vec{v} \circ \hat{j} = v_y$   
 $\vec{v} \circ \hat{k} = v_z$

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \frac{\langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} + \frac{\langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} + \dots + \frac{\langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle}{\|b_n\|^2}$$

*Dowód.* Ponieważ  $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$ , zatem  $\langle v, b_1 \rangle = \langle \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n, b_1 \rangle = \alpha_1 \langle b_1, b_1 \rangle + \alpha_2 \langle b_2, b_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle b_n, b_1 \rangle = \alpha_1 \|b_1\|^2$ . Stąd  $\alpha_1 = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}$ . Analogiczne rachunki przeprowadzamy dla  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Jeśli  $v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2} b_i, w = \sum_{j=1}^n \frac{\langle w, b_j \rangle}{\|b_j\|^2} b_j$ , to wówczas  $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2} b_i, \sum_{j=1}^n \frac{\langle w, b_j \rangle}{\|b_j\|^2} b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\|b_i\|^2 \|b_j\|^2} \langle v, b_i \rangle \langle w, b_j \rangle \langle b_i, b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\|b_i\|^4} \langle v, b_i \rangle \langle w, b_i \rangle \|b_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle \langle w, b_i \rangle}{\|b_i\|^2} \quad \square$

**Wniosek 12.2.11.** Jeśli  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  oraz  $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$ , to wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{1} = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \dots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$

*Dowód.* Wystarczy w twierdzeniu 12.2.10 przyjąć  $\|b_i\| = 1$ .  $\square$

**Wniosek 12.2.12.** Niech  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  będzie bazą przestrzeni euklidesowej  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  oraz niech  $v, w \in V$ ,  $v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$ ,  $w = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$ . Wówczas baza  $\mathcal{B}$  jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy  $\langle v, w \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$ .

*Dowód.* Zauważmy, że  $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^n \beta_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i, b_j \rangle$  równa się  $\sum_i \alpha_i \beta_i$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$ .  $\square$

$$\langle b_i, b_i \rangle = 1$$

$$\alpha_i \beta_i$$

$$i \neq j$$

$$\langle b_i, b_j \rangle = 0$$

$$\alpha_i \beta_j = 0$$

TEMAT: Przestrzenie euklidesowe - ciąg dalszy

### 13.1 Metody ortogonalizacji

$$\text{lin}\{b_1, \dots, b_m\} = U \subset V$$

**Twierdzenie 13.1.1.** Niech  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  będzie przestrzenią euklidesową. Niech  $\{b_1, \dots, b_m\} \subset V$  będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny  $\{c_1, \dots, c_m\} \subset V$  taki, że  $\text{lin}\{b_1, \dots, b_m\} = \text{lin}\{c_1, \dots, c_m\}$ .

*Bez dowodu.* Metoda dowodowa jest analogiczna do tej przedstawionej w przykładzie 13.1.3 poniżej.

- Wniosek 13.1.2.**
- i) Każda skończenie wymiarowa przestrzeń euklidesowa różna od  $\{0\}$  ma bazę ortogonalną i ortonormalną.
  - ii) W przestrzeni euklidesowej skończenie wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

*Dowód.* i) Na mocy twierdzenia 7.2.23 i) skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa różna od  $\{0\}$  ma bazę. Na mocy twierdzenia 13.1.1, bazę tę można zortogonalizować. Ponadto możemy unormować wektory otrzymanej bazy ortogonalnej.  
 ii) Na mocy wniosku 12.2.7 układ ortonormalny jest liniowo niezależny. Na mocy twierdzenia 7.2.23 iii) układ liniowo niezależny może być uzupełniony do bazy.  $\square$

#### Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

**Przykład 13.1.3.** Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{E}^3$ , tj.  $\mathbb{R}^3$  ze standardowym iloczynem skalarnym. Dana jest baza  $\mathcal{B} = (b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4))$  przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Dokonamy ortogonalizacji bazy  $\mathcal{B}$ .

$$1 \cdot 5 + (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 1$$

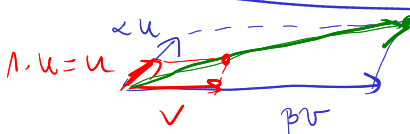
Zauważmy, że baza  $\mathcal{B}$  nie jest ortogonalna, bowiem  $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$ . Niech  $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$  oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech  $c_1 := b_1 = (1, -2, 0)$ . Wówczas oczywiście  $\text{lin}\{c_1\} = \text{lin}\{b_1\}$ .

II KROK: Aby zagwarantować, że  $\text{lin}\{c_1, c_2\} = \text{lin}\{b_1, b_2\}$ , poszukujemy  $c_2$  w postaci  $c_2 = b_2 + \alpha c_1$ , dla pewnego  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dobierzemy  $\alpha$  w taki sposób, by  $c_2 \circ c_1 = 0$ .  
 Obliczamy  $c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1)$ .

$c_2 = ?$   
 $\alpha = ?$

$c_2 \in \text{lin}\{b_1, b_2\}$   
 $\parallel$   
 $c_1$



$c_2$  - kom. liniowa  $c_1$  i  $b_2$



WNIOSEK PONIŻEJ

Aby  $c_2 \circ c_1 = 0$ , wystarczy przyjąć  $\alpha = -\frac{b_2 \circ c_1}{c_1 \circ c_1}$ .

W naszym przykładzie  $0 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_2 \circ c_1) = (5, 5, 1) \circ (1, -2, 0) + \alpha \cdot (1, -2, 0) \circ (1, -2, 0) = -5 + 5\alpha$ , skąd  $\alpha = 1$ . Zatem  $c_2 = b_2 + c_1 = (6, 3, 1)$ .

III KROK: Aby zagwarantować, że  $\text{lin}\{c_1, c_2, c_3\} = \text{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$ , poszukujemy  $c_3$  w postaci  $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$ , dla pewnych  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ . Dobierzemy  $\beta_1, \beta_2$  w taki sposób, by  $c_3 \circ c_1 = 0$  oraz  $c_3 \circ c_2 = 0$ .

Mamy  $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 \|c_1\|^2$ , skąd  $\beta_1 = -\frac{b_3 \circ c_1}{\|c_1\|^2}$ . Analogicznie  $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 \|c_2\|^2$ , skąd  $\beta_2 = -\frac{b_3 \circ c_2}{\|c_2\|^2}$ .

W naszym przykładzie  $\begin{cases} 0 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 \|c_1\|^2 = (5, 4, 4) \circ (1, -2, 0) + \beta_1 (1 + 4 + 0) = -3 + 5\beta_1 = 0 \\ 0 = b_3 \circ c_2 + \beta_2 \|c_2\|^2 = (5, 4, 4) \circ (6, 3, 1) + \beta_2 (36 + 9 + 1) = 46 + 46\beta_2 = 0 \end{cases}$

Skąd  $\beta_1 = \frac{3}{5}, \beta_2 = -1$ .

Zatem  $c_3 = b_3 + \frac{3}{5}c_1 - c_2 = (5, 4, 4) + \frac{3}{5}(1, -2, 0) - (6, 3, 1) = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)$ .

$\mathcal{C} = (c_1 = (1, -2, 0), c_2 = (6, 3, 1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3))$  jest bazą ortogonalną.

Ponieważ  $\|c_1\| = \sqrt{5}, \|c_2\| = \sqrt{46}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{46}{5}}$ , zatem bazą ortonormalną jest

$\mathcal{C}' = (c'_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1, -2, 0), c'_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{1}{\sqrt{46}} \cdot (6, 3, 1), c'_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \sqrt{\frac{5}{46}} \cdot (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3))$ .

**Wniosek 13.1.4.** Jeśli  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , to wówczas ciąg wektorów  $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \quad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 \quad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 \quad \dots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{\|c_i\|^2} c_i$$

**Przykład 13.1.5.** Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{R}_2[x]$  z iloczynem skalarnym  $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ . Dokonamy ortogonalizacji bazy  $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ .

Niech  $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$ . Zauważmy, że baza  $\mathcal{B}$  nie jest ortogonalna, bowiem  $b_1 \circ b_3 = 1 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 2 \neq 0$ .

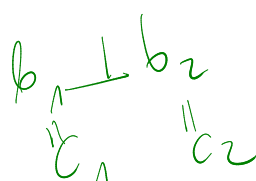
Niech  $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$  oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech  $c_1 := b_1 = 1$ .

II KROK: Poszukujemy  $c_2 = b_2 + \alpha c_1, \alpha \in \mathbb{R}$ . Dobierzmy  $\alpha$  tak, by  $c_2 \circ c_1 = 0$ .

Obliczamy  $0 = c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1) = (-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \alpha(1 + 1 + 1) = 3\alpha$ .

Skąd  $\alpha = 0$ . Zatem  $c_2 = b_2 = x$ . (Mogliśmy to zauważyć wcześniej.)





$$c_3 \in \text{lin}(c_1, c_2, b_3) \implies \text{lin}(b_1, b_2, b_3) = \text{lin}(c_1, c_2, c_3)$$

III KROK: Poszukujemy  $c_3$  w postaci  $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$ ,  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ . Dobierzmy  $\beta_1, \beta_2$  tak, by  $c_3 \circ c_1 = 0$  oraz  $c_3 \circ c_2 = 0$ .

Mamy  $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 \|c_1\|^2 = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \beta_1 \cdot 3$ , skąd  $\beta_1 = -\frac{2}{3}$ .

Analogicznie  $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 \|c_2\|^2 = (1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) + \beta_2 \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 1^2) = 2\beta_2$ , skąd  $\beta_2 = 0$ .

Zatem  $c_3 = b_3 - \frac{2}{3}c_1 = x^2 - \frac{2}{3}$ .

$C = (c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x^2 - \frac{2}{3})$  jest bazą ortogonalną.

$$\|c_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \|c_2\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Bazą ortonormalną jest układ wektorów

$$C' = (c'_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c'_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}x, c'_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3})$$

$m \times m$   $m \times m$   
 $A A^T$   
 kwadratowa  
 $m \times m$

### Macierzowa metoda ortogonalizacji

**Twierdzenie 13.1.6.** Niech  $u_1, \dots, u_m$  będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni  $\mathbb{E}^n$ . Niech  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów  $u_1, \dots, u_m$  w bazie kanonicznej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej  $[AA^T|A]$ , można doprowadzić ją do postaci  $[G|A']$ , gdzie  $G \in M_m(\mathbb{R})$  jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy  $A' \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  są ortogonalne w  $\mathbb{E}^n$ .

Bez dowodu. Dowód można znaleźć w [4].

$$[AA^T|A] \rightarrow \left[ \begin{array}{c|c} \text{kwadratowa} & A \end{array} \right]$$

**Przykład 13.1.7.** Stosując metodę macierzową, zortogonalizujemy układ wektorów  $b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4)$  w przestrzeni  $\mathbb{E}^3$ .

tutaj  
 myślik

Układ ten jest liniowo niezależny, bowiem  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$ .

Układ ten nie jest ortogonalny, bowiem  $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$ .

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 51 & 49 \\ -3 & 49 & 57 \end{bmatrix}$$

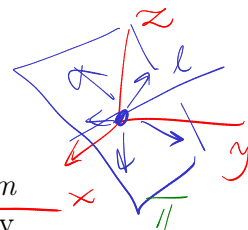
$$[A \cdot A^T | A] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 51 & 49 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & 49 & 57 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 + \frac{3}{5}w_1]{w_2 + w_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 46 & \frac{276}{5} & \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2}$$

Układ ortogonalny  $c_1 = (1, -2, 0), c_2 = (6, 3, 1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 3)$ .

Jeśli nie używalimy operacji  $\alpha \cdot w_i$ , to na przekątnej macierzy  $G$  otrzymujemy  $\|c_1\|^2, \|c_2\|^2, \|c_3\|^2$ .

Zatem  $\|c_1\| = \sqrt{5}, \|c_2\| = \sqrt{46}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{46}{5}}$ .

### 13.2 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń



Niech  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  będzie przestrzenią euklidesową, zaś  $S \subset V$  dowolnym podzbiorem.

**Definicja 13.2.1.** Zbiór  $S^\perp := \{v \in V : \forall x \in S \langle v, x \rangle = 0\}$  nazywamy dopełnieniem ortogonalnym zbioru  $S$  w przestrzeni euklidesowej  $V$ . Jeżeli zbiór  $S$  jest jednoelementowy tj.  $S = \{x\}$ , to zbiór  $S^\perp$  nazywamy dopełnieniem ortogonalnym wektora  $x \in V$ .

**Twierdzenie 13.2.2.** Niech  $V$  będzie przestrzenią euklidesową.

- i) Jeśli  $U \subset V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $V$ , to wówczas  $U^\perp$  również jest podprzestrzenią liniową.
- ii) Dla dowolnego wektora  $u \in V$  zbiór  $\{u\}^\perp$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $V$ .

$l \subset \mathbb{R}^3$   
 $\pi \perp l$   
 $\vec{a} // l \rightarrow \vec{a} \perp \pi$

**Dowód.** i) Niech  $x, y \in U^\perp, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Wówczas dla dowolnego  $w \in U$  mamy  $\langle \alpha x + \beta y, w \rangle = \alpha \langle x, w \rangle + \beta \langle y, w \rangle = 0$ . Zatem  $\alpha x + \beta y \in U^\perp$ .  
 ii) Niech  $x, y \in \{u\}^\perp, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Wówczas  $\langle \alpha x + \beta y, u \rangle = \alpha \langle x, u \rangle + \beta \langle y, u \rangle = 0$ . Zatem  $\alpha x + \beta y \in \{u\}^\perp$ .  $\square$

**Przykład 13.2.3.** W przestrzeni  $\mathbb{E}^4$  wyznaczmy wszystkie wektory  $v$  ortogonalne do  $u = (1, 0, 1, 0)$ .

$\mathbb{R}^4$  + stand. il. skalarny  $\hookrightarrow \vec{u}, \vec{v} \perp$

Niech  $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . Wówczas  $u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$ . Zatem  $v = (x, y, -x, t)$  oraz  $\{u\}^\perp = \{(x, y, -x, t) : x, y, t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ .

**Definicja 13.2.4.** Niech  $U$  będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni  $V$ . Jeśli  $w \in U^\perp$ , to mówimy, że wektor  $w$  jest ortogonalny do podprzestrzeni  $U$  i piszemy  $w \perp U$ .

**Uwaga 13.2.5.** Niech  $U$  będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni  $V$ , zaś  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$  bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora  $w \in V$

$$w \perp U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad w \perp b_i$$

**Dowód.** Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. Ponadto jeśli dla dowolnego  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  mamy  $\langle w, b_i \rangle = 0$ , to wówczas dla dowolnego  $u \in U, u = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$  mamy  $\langle w, u \rangle = \alpha_1 \langle w, b_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle w, b_n \rangle = 0$ . Zatem  $w \perp U$ .  $\square$

**Przykład 13.2.6.** Rozważmy  $V = \mathbb{R}_2[x]$  z iloczynem skalarnym  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ , podprzestrzeń  $U = \mathbb{R}_1[x]$  oraz  $w = 6x^2 - 6x + 1$ . Czy  $w \perp U$ ?

$$w \perp U = \mathbb{R}_1[x] = \text{lin}\{1, x\} \Leftrightarrow \boxed{w \perp 1 \wedge w \perp x}$$

$$\langle w, 1 \rangle = \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = 2x^3 - 3x^2 + x \Big|_0^1 = 0$$

$$\langle w, x \rangle = \int_0^1 (6x^3 - 6x^2 + x)dx = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = 0 \quad \text{Zatem } w \perp U.$$

$w \notin U$   
 $w \in U^\perp$

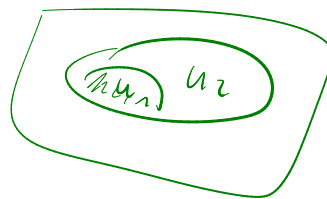
**Własności dopełnienia ortogonalnego**

**Twierdzenie 13.2.7.** Niech  $V$  będzie przestrzenią euklidesową, zaś  $U, U_1, U_2$  jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

i)  $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$ , *odwrotna inkluzja*

ii)  $U^\perp = (\text{lin}U)^\perp$ ,

iii)  $U \subset (U^\perp)^\perp$ . *" = " skrywające*



*Dowód.* i)  $x \in U_2^\perp \Leftrightarrow \forall y \in U_2 x \perp y \stackrel{U_1 \subset U_2}{\Rightarrow} \forall y \in U_1 x \perp y \Leftrightarrow x \in U_1^\perp$

ii) Wynika z uwagi 13.2.5.

iii) Niech  $u \in U$ . Wówczas  $\langle u, x \rangle = 0$  dla dowolnego  $x \in U^\perp$ . Stąd  $u \perp x$  dla dowolnego  $x \in U^\perp$ , czyli  $x \in (U^\perp)^\perp$ .  $\square$

Niech  $V$  będzie przestrzenią euklidesową, zaś  $U$  jej podprzestrzenią liniową.

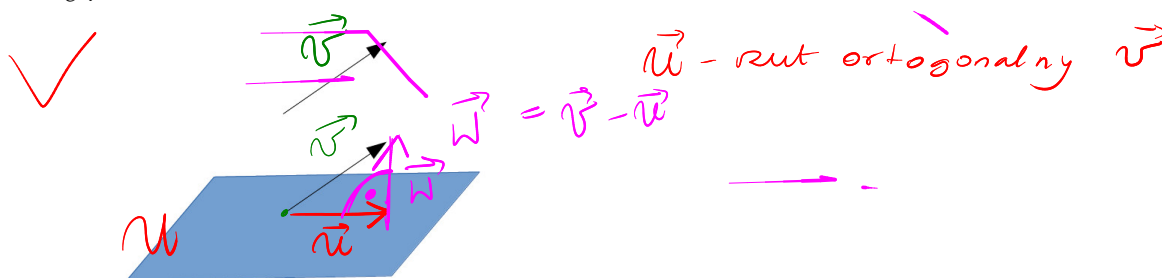
**Definicja 13.2.8.** Operator liniowy  $\pi \in \text{End}(V)$  dany wzorem

$$\forall v \in V \pi(v) = u, \quad \text{gdzie } \underbrace{v - u}_{w \in U^\perp} \perp U,$$

$\Pi$  *proj.*

nazywamy *rzutowaniem ortogonalnym* lub *projekcją ortogonalną* na podprzestrzeń  $U$ .

Obraz wektora  $v$  poprzez  $\pi$  nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora  $v \in V$  na podprzestrzeń  $U$ .



**Twierdzenie 13.2.9** (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego). Jeśli  $\dim U < \infty$ , to wówczas dla dowolnego  $v \in V$  istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny  $u \in U$  tego wektora na podprzestrzeń  $U$ .

i) Jeśli  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$  jest dowolną bazą podprzestrzeni  $U$ , wówczas  $u = \pi(v) = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$ , gdzie *macierz Grama*

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \langle v, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k \rangle \end{bmatrix}. \quad (1)$$

ii) Jeśli  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$  jest bazą ortogonalną, wówczas rzut ten określony jest wzorem

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} b_2 + \dots + \frac{\langle v, b_k \rangle}{\|b_k\|^2} b_k.$$

$\vec{a} = [a_x, a_y] = a_x \cdot b_1 + a_y \cdot b_2$

$\vec{d} = [d_x, d_y] = d_x \cdot b_1 + d_y \cdot b_2$

$\vec{a} \circ \vec{d} = a_x d_x (b_1 \circ b_1) + a_y d_y (b_1 \circ b_2) + a_x d_y (b_2 \circ b_1) + a_y d_x (b_2 \circ b_2) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$  *punkt u \in U*

$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$

iii) Jeśli baza  $\mathcal{B}$  jest bazą ortonormalną, wówczas

$$\|b_i\| = 1$$

$$u = \pi(v) = \underbrace{\langle v, b_1 \rangle}_{\alpha_1} b_1 + \underbrace{\langle v, b_2 \rangle}_{\alpha_2} b_2 + \dots + \underbrace{\langle v, b_k \rangle}_{\alpha_k} b_k.$$

**Dowód.** Jeśli  $u = \pi(v)$ , to  $v - u \perp U$ , co na mocy uwagi 13.2.5 jest równoważne  $v - u \perp b_i$  dla  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Zatem  $\langle v - u, b_i \rangle = 0$  lub równoważnie  $\langle v, b_i \rangle = \langle u, b_i \rangle$ . Ponieważ  $u \in U$ , zatem istnieją  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  takie, że  $u = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$ .

i) Otrzymujemy układ równań  $\langle v, b_i \rangle = \langle u, b_i \rangle = \langle \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k, b_i \rangle = \alpha_1 \langle b_1, b_i \rangle + \dots + \alpha_k \langle b_k, b_i \rangle$ , gdzie  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , który jest równoważny układowi (1).

ii) Na mocy twierdzenia 12.2.10 mamy  $\alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}$ .

iii) Na mocy wniosku 12.2.11 mamy  $\alpha_i = \langle v, b_i \rangle$ .  $\square$

Macierz  $\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix}$  występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy macierzą Grama układu wektorów  $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ .

**Przykład 13.2.10.** W przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{E}^4$  wyznaczmy rzut ortogonalny wektora

$v = (1, 1, 1, 0)$  na podprzestrzeń  $U = \text{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$ .

Zauważmy, że  $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$  jest bazą  $U$ , bowiem  $r \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2$ .

**METODA I**

$u := \pi_U(v) = ?$ ,  $w := v - u \perp U \Leftrightarrow w \perp b_1 := (2, 1, 1, 2) \wedge w \perp b_2 := (1, 1, -3, 0)$

$u \in U$ , zatem istnieją  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  takie, że  $u = \alpha b_1 + \beta b_2$ . Wówczas

$$w = (1, 1, 1, 0) - \alpha(2, 1, 1, 2) - \beta(1, 1, -3, 0) = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha)$$

Otrzymujemy układ dwóch równań

$$0 = \langle w, b_1 \rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (2, 1, 1, 2) = 4 - 10\alpha,$$

$$0 = \langle w, b_2 \rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 - 11\beta.$$

Stąd  $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = -\frac{1}{11}$  oraz

$$u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{2}{5}, -\frac{1}{11}\right]_{\mathcal{B}} = \frac{2}{5}b_1 - \frac{1}{11}b_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, 0\right) = \left(\frac{39}{55}, \frac{17}{55}, \frac{37}{55}, \frac{4}{5}\right)$$

**METODA II**

Zauważmy, że baza  $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$  jest ortogonalna.

Istotnie  $b_1 \circ b_2 = (2, 1, 1, 2) \circ (1, 1, -3, 0) = 0$ . Na mocy twierdzenia 12.2.10 mamy

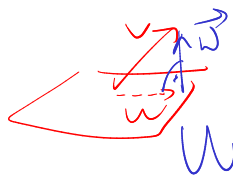
$$u = \left[ \frac{\langle u, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}, \frac{\langle u, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} \right]. \text{ Ale } \langle v, b_i \rangle = \langle u, b_i \rangle, \text{ zatem } u = \left[ \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}, \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} \right]. \text{ Obliczamy}$$

$$\langle v, b_1 \rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (2, 1, 1, 2) = 4, \langle v, b_2 \rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 \text{ oraz } \|b_1\|^2 = 10,$$

$$\|b_2\|^2 = 11. \text{ Stąd } u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}.$$

**UWAGA:** Gdyby baza  $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$  nie była ortogonalna, zawsze możemy metodą Grama-Schmidta ją zortogonalizować i w dalszych rachunkach wykorzystać znaną bazę ortogonalną

$\mathcal{C} := (c_1, c_2)$ .



113

$$w = v - u \perp U$$

$$w \circ b_1 = w \circ b_2 = 0$$

$$\langle v - u, b_1 \rangle = 0 \quad \langle v - u, b_2 \rangle = 0$$
$$\langle v, b_1 \rangle - \langle u, b_1 \rangle = 0 \quad \downarrow$$

$$\langle v, b_1 \rangle = \langle u, b_1 \rangle \quad \langle v, b_2 \rangle = \langle u, b_2 \rangle$$

### Interpretacja geometryczna metody Grama-Schmidta

Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{E}^3$  i jej bazę  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ . Niech  $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$  będzie szukaną bazą ortogonalną.

KROK I:

$$c_1 := b_1$$

$$\text{lin}\langle c_1 \rangle = \text{lin}\langle b_1 \rangle$$

KROK II:

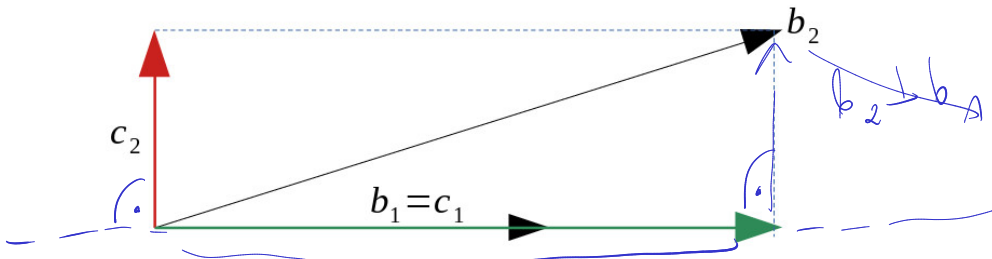
$$c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 = b_2 - \pi_{\text{lin}\langle c_1 \rangle}(b_2)$$

$$c_2 = ?$$

$$\text{lin}\langle c_1, c_2 \rangle = \text{lin}\langle b_1, b_2 \rangle$$

$$c_2 \in \text{lin}\langle b_2, c_1 \rangle$$

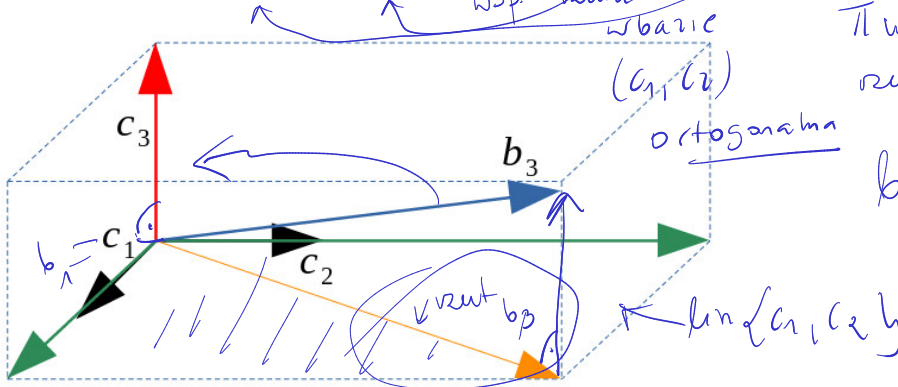
$$c_2 = b_2 + \alpha \cdot c_1$$



KROK III:

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 = b_3 - \pi_{\text{lin}\langle c_1 \rangle}(b_3) - \pi_{\text{lin}\langle c_2 \rangle}(b_3) = b_3 - \pi_{\text{lin}\langle c_1, c_2 \rangle}(b_3)$$

$$\pi_{\text{lin}\langle c_1, c_2 \rangle}(b_3) = \alpha \cdot c_1 + \beta \cdot c_2$$



$$b_3 =$$

Przykład:

$$C[-1,1] = \{f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ ciągła}\}$$

$$p, q \in C[-1,1]$$

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx \quad \text{iloczyn skalarny!}$$

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^3 \quad f_3(x) = x^5$$

$U = \text{lin}\{f_1, f_2, f_3\}$  ortogonalizować bazę  $(f_1, f_2, f_3)$

metoda G-S

$$\langle x, x^3 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x^3 dx = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5} \neq 0$$

baza  $(f_1, f_2, f_3)$  nie jest ortogonalna!   
  $f_1 \perp f_2$

$(g_1, g_2, g_3)$  — szukana baza ortogonalna

①  $g_1 = f_1$

$$g_1(x) = x$$

②  $g_2 = ?$

$$\text{lin}\{f_1, f_2\} = \text{lin}\{g_1, g_2\}$$

$$\langle g_1, g_1 \rangle = 0$$

$$g_2 = f_2 + \alpha g_1$$

$$= x^3 + \alpha \cdot x$$

$$\int_{-1}^1 g_2(x)g_1(x) dx = 0$$

$$0 = \int_{-1}^1 (x^3 + \alpha \cdot x) \cdot x dx$$

$$= \int_{-1}^1 x^4 dx + \alpha \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^5}{5} + \alpha \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1$$

$$= 2 \left( \frac{1}{5} + \alpha \cdot \frac{1}{3} \right) = 0$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\alpha = 0 \quad / \cdot 15$$

$$3 + 5\alpha = 0 \quad \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\|g_2\| = \sqrt{\langle g_2, g_2 \rangle}$$

$$\|g_2\|^2 = \int_{-1}^1 g_2^2 dx = \int_{-1}^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx$$

$$g_2 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

③  $g_3 = ?$

$$\text{lin}\{f_1, f_2, f_3\} = \text{lin}\{g_1, g_2, g_3\}$$

Wyrażają się od  $g_1, g_2$

$$\langle g_1, g_3 \rangle = 0 \quad \wedge \quad \langle g_2, g_3 \rangle = 0$$

$$f_1 = g_1$$

$$f_2 = g_2 - \alpha g_1$$

$$g_3 \perp g_1$$

$$g_3 = f_3 + \alpha g_1 + \beta g_2$$

$$g_3 = x^5 + \alpha \cdot x + \beta \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)$$

$$0 = \int_{-1}^1 (x^5 + \alpha x + \beta \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)) dx$$

$$0 = \int_{-1}^1 (x^5 + \alpha x + \beta \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)) \cdot \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) dx \Rightarrow \alpha = ? \quad \beta = ?$$

# Przykład

$$\mathbb{R}^5 \supset U = \text{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$$

stand. ilskad.

I

$$b_1 = (1, 1, -1, 0, 0)$$

$$b_2 = (0, 2, -1, 1, 0)$$

$$b_3 = (0, 4, -2, 0, 1)$$

$$b_1 \cdot b_2 = 0 + 2 + 1 + 0 + 0 \neq 0$$

bara nie jest ortogonalna

II

dyżo na cwi. czenniach

$$C = (c_1, c_2, c_3) \text{ bara ortogonalna } U$$

$$c_1 = (1, 1, -1, 0, 0)$$

$$c_2 = (-1, 1, 0, 1, 0)$$

$$c_3 = (-2/3, 2/3, 0, -1/3, 1)$$

Rzut ortogonalny

$$(\mathbb{R}^5 \ni v = (1, 0, 2, 1, 1)) \text{ ma } U$$

I wykorzystam barę B

$$u = ? \quad u = \text{II}_U(v) = ?$$

$$w = v - u \perp U = \text{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$$

$$w \cdot b_1 = w \cdot b_2 = w \cdot b_3 = 0$$

$$v \cdot b_1 = u \cdot b_1 \quad v \cdot b_2 = u \cdot b_2 \quad v \cdot b_3 = u \cdot b_3$$

$$u \in U \Rightarrow u = \frac{\alpha}{?} b_1 + \frac{\beta}{?} b_2 + \frac{\gamma}{?} b_3$$

$$w = v - u = (1, 0, 2, 1, 1) - \alpha \cdot (1, 1, -1, 0, 0) - \beta \cdot (0, 2, -1, 1, 0) - \gamma \cdot (0, 4, 2, 0, 1)$$

$$= (1 - \alpha, -\alpha - 2\beta - 4\gamma, 2 + \alpha + \beta + 2\gamma, 1 - \beta, 1 - \gamma)$$

$$0 = b_1 \cdot w = 1 - \alpha + (-\alpha - 2\beta - 4\gamma) - (2 + \alpha + \beta + 2\gamma) = 1 - 3\alpha - 3\beta - 6\gamma$$

$$0 = b_2 \cdot w = -2\alpha - 4\beta - 8\gamma - 2 - \alpha - \beta - 2\gamma + 1 - \beta = -1 - 3\alpha - 6\beta - 10\gamma$$

$$0 = b_3 \cdot w = -4\alpha - 8\beta - 16\gamma - 4 - 2\alpha - 2\beta - 4\gamma + 1 - \gamma = -3 - 6\alpha - 10\beta - 21\gamma$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 3\beta + 6\gamma = -1 \\ 3\alpha + 6\beta + 10\gamma = -1 \\ 6\alpha + 10\beta + 21\gamma = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{row}} \begin{matrix} \alpha = -\frac{5}{33} \\ \beta = \frac{4}{11} \\ \gamma = -\frac{3}{11} \end{matrix}$$

$$u = \left[ \alpha, \beta, \gamma \right]_B = -\frac{5}{33} b_1 + \frac{4}{11} b_2 - \frac{3}{11} b_3 = \dots ?$$

II za pomocą

$$C = (c_1, c_2, c_3)$$

bara ortogonalna

$$c_1 = (1, 1, -1, 0, 0)$$

$$v = (1, 0, 2, 1, 1)$$

$$u = \left[ \alpha', \beta', \gamma' \right] C = ?$$

$$\langle u, c_1 \rangle = \langle v, c_1 \rangle$$

$$\alpha' = \frac{\langle u, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} = \frac{\langle v, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} = \frac{1+0-2+0+0}{1^2+1^2+(-1)^2} = -\frac{1}{3}$$

$$\beta' = \frac{\langle v, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} \quad \gamma' = \frac{\langle v, c_3 \rangle}{\|c_3\|^2}$$