

Zadanie domowe nr 4 Przestrzenie wektorowe i odwzorowania liniowe

Zadanie 1. Czy U jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V ? Odpowiedź uzasadnij.

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) : x = 4y^2\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) : x^2 + y^4 = 0\}$

Zadanie 2. Niech

$$p = 1 + x, \quad q = 2 - 3x, \quad r = 3 - x + 5x^2.$$

a) Uzasadnij, że układ $\mathcal{B}' = (p, q, r)$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Wyznacz macierz przejścia od bazy standardowej $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ do bazy \mathcal{B}' .

b) Wyznacz współrzędne wektora $w = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}x + 5x^2$ w tejże bazie.

Zadanie 3. Dane jest odwzorowanie liniowe

$$f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \quad f(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x).$$

a) Wyznacz macierz f w bazach standardowych.

b) Wyznacz $\text{Ker} f$, $\text{Im} f$, ich bazy i wymiary. Podaj własności f (monomorfizm, epimorfizm).

Zadanie 4. Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane jest za pomocą następującego przyporządkowania.

$$f(1, 1, 1) = (2, 2), \quad f(1, 0, 1) = (1, 0), \quad f(0, 1, 1) = (1, 1)$$

a) Podaj wzór odwzorowania f .

b) Wyznacz macierz $A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ tego odwzorowania w bazach

$$\mathcal{B} = \{b_1 = (3, 1, 1), b_2 = (5, 1, 6), b_3 = (4, -1, 2)\}, \quad \mathcal{C} = \{c_1 = (-1, 1), c_2 = (1, 0)\}.$$

c) Rozważmy w \mathbb{R}^2 bazę $\mathcal{C}' = \{c'_1 = (1, 1), c'_2 = (2, 1)\}$. Wyznacz macierz przejścia $P = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'}$ od bazy \mathcal{C} do bazy \mathcal{C}' .

d) Wykorzystując macierz P wyznacz współrzędne wektora $v \in \mathbb{R}^2$ w bazie \mathcal{C}' , jeżeli

$$v = [2, 5]_{\mathcal{C}}.$$