Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA Zadanie domowe nr 5
WFiIS, informatyka stosowana, I rok
styczeń 2024r.

Zadanie domowe nr 5
Diagonalizacja endomorfizmu, ortogonalizacja bazy, rzutowanie

Zadanie 1. *Zbadaj diagonalizowalność endomorfizmu* φ.

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], \quad \varphi(p)(x) = 3xp''(x) + (x^2-1)p(1) + xp(2)$$

Zadanie 2. *Dany jest* $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ *taki, że*

$$\varphi(1,0,0) = (1,0,0),\ \varphi(1,1,0) = (-1,-1,0),\ \varphi(1,1,1) = (0,0,0).$$

Oblicz $\varphi^{100}(3,6,9)$.

Zadanie 3. *Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu* φ *i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni (krotność geometryczną). Czy podany endomorfizm jest diagonalizowalny? Jeśli tak, dokonaj diagonalizacji reprezentującej go macierzy.*

$$\varphi \in End(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x,y,z) = (x+2y-2z, x+3z, x+3y)$$

Zadanie 4. *Niech* $f \in End(\mathbb{R}^n)$ *i niech* A *to reprezentacja macierzowa* f *w bazie kanonicznej. Przedyskutuj diagonalizowalność* f *w zależności od parametru* $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a^2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5. *Dana jest podprzestrzeń liniowa* U *przestrzeni* $\mathbb{R}^4$.

$$U = \text{lin}\{b_1 = (1,1,-1,0), b_2 = (0,2,-1,1), b_3 = (1,5,-3,0)\}$$

a) *Metodą Grama-Schmidta zortogonalizuj bazę* $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ *przestrzeni* U.

b) *Wyznacz rzut ortogonalny* $u = \pi_U(v)$ *wektora* $v = (1,0,1,0) \in \mathbb{R}^4$ *na podprzestrzeń* U.