Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 1
WFiIS, informatyka stosowana, I rok
październik 2023r.

Podstawowe struktury algebraiczne

Notacja:
$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{Q}_+ = \{a \in \mathbb{Q} : a > 0\}$ $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

1 Działania i ich własności

Zadanie 1. *Uzupełnij tabelę wpisując TAK lub NIE w odpowiednim polu w zależności od tego czy* $+, -, \cdot, :$ *jest lub nie jest działaniem wewnętrznym w danym zbiorze.*

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
$+$							
$-$							
$\cdot$							
$:$							

Zadanie 2. *a) Czy dodawanie jest działaniem w zbiorze liczb niewymiernych?*
b) Czy potęgowanie liczb jest działaniem łącznym w $\mathbb{N}$*?*
c) Czy zwykłe dodawanie i mnożenie są działaniami w zbiorze $\{-1, 0, 1\}$*?*
d) W którym spośród zbiorów $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{-1, 0, 1\}, \{0, 1, \}, \{0\}$ *wzór* $a \circ b = a^2 - b^2$ *określa działanie?*
e) Czy działanie dane wzorem $x \circ y = \sqrt{xy}$ *jest działaniem wewnętrznym w zbiorze* $\mathbb{Q}_+$*?*

Zadanie 3. *Sprawdź, że* $\circ$ *jest działaniem wewnętrznym w zbiorze* A *i zbadaj jego własności (przemienność, łączność, element neutralny, element symetryczny, idempotenty).*

a) $A = \mathbb{Q}, \quad \forall a, b \in A \quad a \circ b = \frac{a+b}{2}$
b) $A = \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in A \quad x \circ y = x + y + 1$
c) $A = (-1, 1) \subset \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in A \quad x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$
d) $A = \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in A \quad x \circ y = e^{x+y}$
e) $A = \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in A \quad x \circ y = x^y$
f) $A = \mathbb{R}, \quad \forall a, b \in A \quad a \circ b = ab + a + b$
g) $A = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \quad (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$

Zadanie 4. *a) Wyznacz elementy neutralne działań* $\wedge$ *oraz* $\vee$ *określonych w przedziale* $[4, 5] \subset \mathbb{R}$ *wzorami*

$$\forall a, b \in (4, 5) \quad a \wedge b = \max(a, b), \qquad a \vee b = \min(a, b).$$

b) Działanie $\square$ *jest określone zbiorze* $\mathbb{R}_+$ *wzorem* $a \square b = 5^{\log_5 a \cdot \log_5 b}$*. Sprawdź, czy jest ono łączne i przemienne. Znajdź element neutralny tego działania. Wyznacz elementy symetryczne do tych liczb* $a \in \mathbb{R}_+$*, które taki element mają.*

c) W zbiorze dzielników naturalnych liczby 6 określamy działania $\circ$, $\square$ *następująco*

$$a \circ b = NWW(a, b), \quad a \square b = NWD(a, b).$$

Zbadaj własności tych działań. Zbadaj, czy działanie $\circ$ *jest rozdzielne względem działania* $\square$.

d) W zbiorze $\mathbb{R}$ *określamy działania* $\odot$ *oraz* $\oplus$ *następująco*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \odot b = ab + a + b, \qquad a \oplus b = a + b + 1.$$

Zbadaj, czy działanie $\odot$ *jest rozdzielne względem działania* $\oplus$.

e) Niech X *będzie zbiorem, zaś* $\mathcal{P}(X)$ *rodziną wszystkich jego podzbiorów (tzw. zbiór potęgowy). Wyznacz element neutralny działań* $\cap, \cup, \div$ *(tj. przecięcie, suma i różnica symetryczna zbiorów) w zbiorze* $\mathcal{P}(X)$.

f) W zbiorze $\{a, b, c, d\}$ *działanie* $*$ *zdefiniowano za pomocą tabeli.*

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

Czy działanie to jest przemienne, łączne, czy ma element neutralny? Podać elementy symetryczne do poszczegolnych elementów zbioru (o ile istnieją).

Zadanie 5. *Niech* A *będzie zbiorem nieskończonym i niech* $a_0 \in A$. *Czy można w zbiorze* A *tak określić działanie* $\circ$, *by każdy element zbioru* $A \setminus \{a_0\}$ *miał nieskończenie elementów symetrycznych względem tego działania?*

WSKAZÓWKA: Jeśli działanie wewnętrzne w zbiorze A *jest łączne i posiada element neutralny, to wówczas jeśli istnieje element symetryczny do danego elementu* $a \in A$, *to jest on jedyny.*

2 Podstawowe struktury algebraiczne

Zadanie 6. *Czy dany zbiór z działaniem dodawania, bądź mnożenia liczb jest półgrupą (przemienną)/monoidem/grupą (abelową)?*

a) $(\mathbb{N}, +)$ *b)* $(\mathbb{Z}, +)$ *c)* $(\mathbb{Q}, +)$ *d)* $(\mathbb{R}, +)$ *e)* $(\mathbb{N}, \cdot)$ *f)* $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *g)* $(\mathbb{Q}, \cdot)$ *h)* $(\mathbb{R}, \cdot)$

i) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ *j)* $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ *k)* $(\mathbb{R}_+, +)$ *l)* $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ *m)* $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, +)$ *n)* $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \cdot)$

o) $(A, \cdot)$, *gdzie* $A = \{1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots\}$ *p)* $(A, \cdot)$, *gdzie* $A = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}, a > 0\}$

q) $(n\mathbb{Z}, +)$, *gdzie* $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$, $n \in \mathbb{N}$ *ustalone*

r) $(A, +)$, *gdzie* $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) = 0\}$ *s)* $(S, \cdot)$, *gdzie* $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

t) $(\sqrt[n]{1}, \cdot)$, *gdzie* $\sqrt[n]{1} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ *ustalone*

u) $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), +)$, *gdzie* $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ *v)* $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), \cdot)$ *w)* $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \setminus \{0\}, \cdot)$

Zadanie 7. *Czy $(X,\circ)$ jest półgrupą (przemienną, z jedynką)/grupą (abelową)?*

a) $X=\{a,b,c,d\}$, *działanie* $\circ$ *określone jest za pomocą tabelki*

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

b) $X=\mathbb{N}$, $x\circ y=x$ *c)* $X=\mathbb{R}$, $x\circ y=x+y+xy$ *d)* $X=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $x\circ y=x+y+xy$

e) $X=\mathbb{R}$, $a\circ b=\frac{1}{2}(a+b)$ *f)* $X=\mathbb{R}$, $a\circ b=|a|+|b|$ *g)* $X=\mathbb{R}^*$, $x\circ y=x\cdot|y|$

h) $X=\mathbb{R}$, $x\circ y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ *i)* $X=\mathbb{R}_+$, $x\circ y=\frac{xy}{x+y}$ *j)* $X=\mathbb{R}$, $a\circ b=\log_5(5^a+5^b)$

k) $X=\mathbb{Z}$, $x\circ y=x+(-1)^x y$ *l)* $X=\mathbb{R}$, $a\circ b=a+b-7$

m) $X=\mathbb{Z}$, $a\circ b=\begin{cases} a+b & ; \ a\in 2\mathbb{Z} \\ a-b & ; \ a\notin 2\mathbb{Z}\end{cases}$ *n)* $X=[0,1)\subset\mathbb{R}$, $x\circ y=x+y-\lfloor x+y\rfloor$

o) $X=\{x\in\mathbb{R}:\ x>1\}$, $a\circ b=ab-a-b+2$ *p)* $X=\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $a\circ b=ab-2a-2b+6$

q) $X=\mathbb{R}^2$, $(a,b)\circ(c,d)=(ac,bc+d)$ *r)* $X=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, $(a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+b)$

s) $X=\mathbb{R}^3$, $(a,b,c)\circ(a',b',c')=(a+a',b+b',c+c'+ab')$

t) $X=\mathbb{R}^n$, $(a_1,\ldots,a_n)\circ(b_1,\ldots,b_n)=(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$

u) $X=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$, $\circ$ *to składanie odwzorowań*

v) X *to zbiór izometrii trójkąta równobocznego (tj. takich izometrii płaszczyzny, przy których trójkąt odwzorowywany jest na siebie),* $\circ$ *to superpozycja izometrii*

w) $X=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$, *gdzie* $\forall_{i=1,\ldots,6}\ f_i:A\to A$ *dla* $A=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ *dane są wzorami* $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\frac{-x-1}{x}$, $f_3(x)=\frac{-1}{x+1}$, $f_4(x)=\frac{1}{x}$, $f_5(x)=\frac{-x}{x+1}$, $f_6(x)=-x-1$, *zaś* $\circ$ *jest składaniem odwzorowań*

Zadanie 8. *a) Dobierz* $k\in\mathbb{R}$ *tak, by* $(\mathbb{R}\setminus\{k\},\star)$ *było grupą abelową, dla* $a\star b=ab-2a-2b+6$.

b) Niech $(G_1,\circ)$ *oraz* $(G_2,\Box)$ *to grupy. Czy zbiór* $G_1\times G_2$ *z działaniem* $(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1\circ x_2,y_1\Box y_2)$ *jest grupą?*

Zadanie 9. *a) Zbuduj tabelki działań* $+_5$ *oraz* $\cdot_5$ *w* $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
b) Zbuduj tabelki działań $+_8$ *oraz* $\cdot_8$ *w* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. *Które elementy są odwracalne względem mnożenia?*

Zadanie 10. *Które z podanych zbiorów liczbowych (ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem liczb) są pierścieniami (przemiennymi, z jedynką, z dzieleniem), a które ciałami?*

a) $\mathbb{Z}$ *b)* $n\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ *c)* $\mathbb{Z}_{\geq 0}=\{x\in\mathbb{Z}:\ x\geq 0\}$ *d)* $\mathbb{Q}$ *e)* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{x+y\sqrt{2}:\ x,y\in\mathbb{Q}\}$

f) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{x + y\sqrt{3} : \ x, y \in \mathbb{Q}\}$ *g)* $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{x + yi\sqrt{2} \in \mathbb{C} : \ x, y \in \mathbb{Q}\}$

h) zbiór ***liczb całkowitych Gaussa*** $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$

i) $P = \{x = y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} : \ x, y, z \in \mathbb{Q}\}$ *j)* $P = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} : \ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

Zadanie 11. *Wskaż pierścienie i ciała.*

a) $\mathcal{C}[a, b]$ *zbiór funkcji ciągłych na przedziale* $[a, b]$*, z działaniami dodawania i mnożenia funkcji* $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, $f(x) \cdot g(x) = (fg)(x)$

b) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$*, gdzie* $a \oplus b = a + b + 1$ *oraz* $a \odot b = a + b + ab$

c) $P = \{f : A \to \mathbb{R} : \ f$ *- ciągła* $\}$ *z dodawaniem i możeniem funkcji*

d) $\mathbb{R}[x]$ *zbiór wielomianów jednej zmiennej* x *o współczynnikach rzeczywistych*

e) $(P, \star, \circ)$*, gdzie* $P = \{a, b\}$ *oraz* $\begin{array}{c|cc} \star & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & a \end{array}$, $\begin{array}{c|cc} \circ & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & a & b \end{array}$

f) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +_n, \cdot_n)$ *zbiór klas reszt modulo* n

g) $S = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ *zbiór ciągów liczbowych o wyrazach rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia* $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n b_n)$

h) zbiór wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych takich, że ich wyraz wolny jest liczbą parzystą

i) $(\mathbb{Q}^2, \oplus, \odot)$, $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$

j) $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$, $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$

Odpowiedzi

1.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
$+$	*tak*	*tak*	*nie*	*tak*	*tak*	*nie*	*tak*
$-$	*nie*	*tak*	*nie*	*tak*	*nie*	*nie*	*tak*
$\cdot$	*tak*	*tak*	*tak*	*tak*	*tak*	*tak*	*tak*
$:$	*nie*	*nie*	*tak*	*nie*	*tak*	*tak*	*nie*

2. *a), b) nie c) mnożenie tak, dodawanie nie d)* $\mathbb{Z}, \{-1, 0, 1\}, \{0\}$ *e) nie* **3.** *a) wewnętrzne, przemienne, ale nie łączne, brak el. neutralnego, każde* $a \in \mathbb{Q}$ *jest idempotentem b) wewnętrzne, przemienne, łączne, e=-1 el. neutralny,* $\forall a \in \mathbb{R}$ $a^{-1} = -a - 2$*, idempotent* $a = -1$ *c) wewnętrzne, przemienne, łączne, e=0 el neutralny,* $\forall a \in (-1, 1)$ $a^{-1} = -a$*, idempotent* $a = 0$ *d) wewnętrzne, przemienne, ale nie łączne, brak el. neutralnego, brak idempotentów e) wewnętrzne, nieprzemienne, nie łączne,* *brak el. neutralnego, $a = 1$ idempotent f) wewnętrzne, przemienne, łączne, e=0 el. neutralny, $\forall a \neq -1 \quad a^{-1} = \frac{-a}{a+1}$, nie istnieje element symetryczny do -1 g) wewnętrzne, przemienne, łączne, e=(1,1) el neutralny, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0 \vee y = 0\} \quad (x,y)^{-1} = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$* **4.** *a) $e_1 = 5, e_2 = 4$ b) przemienne i łączne, $e = 5$ el. neutralny, $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad a^{-1} = 5^{\frac{1}{\log_5 a}}$ c) Działanie $\circ$ jest przemienne, łączne, $e = 6$ el. neutralny, żaden element nie jest odwracalny. Działanie $\square$ jest przemienne, łączne, $e = 1$ el. neutralny, element $a = 1$ jest sam do siebie odwrotny. Działanie $\circ$ jest rozdzielne względem $\square$. d) tak e) $e = \varnothing$ dla $\cup$, $e = X$ dla $\cap$, $e = \varnothing$ dla $\div$ f) przemienne, łączne, a to el. neutralny, $a^{-1} = a, b^{-1} = c, c^{-} = b, d^{-1} = d$*

5. *tak, np.* $a \circ b = \begin{cases} a & ; \; b = a_0 \\ b & ; \; a = a_0 \\ a_0 & ; \; a \neq a_0, b \neq a_0 \end{cases}$ **6.** *a), k), l) półgrupa przemienna, bez jedynki $0 \notin \mathbb{N}$ b), c), d), i), j), q), s) tzw.* ***grupa okręgu*** *, t), u) w) grupa abelowa e), f), g), h), o), v) monoid przemienny, ale nie grupa m), n), p), r) działanie nie jest wewnętrzne* **7.** *e) nie jest to półgrupa, brak łączności c) półgrupa przemienna z jedynką f), i), j), p) półgrupa przemienna bez jedynki q), u) półgrupa nieprzemienna z jedynką b), g) półgrupa nieprzemienna bez jedynki m), r), s) v) tzw.* ***grupa diedralna****, oznaczana D_3, w) grupa nieprzemienna a), d), h), k), l), n), o), t) grupa abelowa* **8.** *a) $k = 2$ b) grupa (abelowa jeśli G_1, G_2 są abelowe)* **9.** *a)*

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

b)

$+_8$	0	1	2	3	4	6	7	
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	6	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

$\cdot_8$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	1
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

, elementy odwracalne: $1, 3, 5, 7$

10. *a), h) pierścień przemienny z jedynką, ale nie ciało b) pierścień przemienny bez jedynki c), j) nie jest pierścieniem d), e), f) g), i) ciało* **11.** *a), b), c), d), e), g), j) pierścień przemienny z jedynką, ale nie ciało f) ciało gdy n jest liczbą pierwszą, w pozostałych przypadkach pierścień przemienny z jedynką h) pierścień przemienny bez jedynki i) ciało*