Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 2
WFiIS, informatyka stosowana, I rok
październik 2023r.

Liczby zespolone

Notacja: $\arg z$ oznacza argument główny liczby z, tj. należący do przedziału $[0, 2\pi)$.

1 Arytmetyka liczb zespolonych

Zadanie 1. *Oblicz:*

a) $(3+2i)^{-1}$ *b)* $\frac{(1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}{2+i}$ *c)* $(-2+\sqrt{3}i)^3$ *d)* $\frac{(1-i)^2-i}{(1+i)^2+i}$ *e)* $\frac{(1+i\sqrt{8})^2(\overline{-1-i})}{1-\sqrt{2}i}$

Zadanie 2. *Wyznacz liczby rzeczywiste $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające podane równania.*

a) $x(2+3i)+y(1-6i)=5-i$ *b)* $(x-2i)(3-yi)=11-5i$ *c)* $\frac{x}{2-3i}+\frac{y}{3+2i}=1$

Zadanie 3. *Niech $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Wyznacz* $\mathrm{Re}(w)$ *oraz* $\mathrm{Im}(w)$.

a) $w=\frac{2}{z-\pi}$ *b)* $w=z^2\cdot i^{1009}$ *c)* $w=\frac{\overline{z}}{z+1}$ *d)* $w=z(z-i)-\overline{z}$

Zadanie 4. *Rozwiąż w zbiorze liczb zespolonych podane równania.*

a) $z^2+3\overline{z}=0$ *b)* $|z|-z=1+2i$ *c)* $z\cdot\overline{z}+(z-\overline{z})=3+2i$ *d)* $|z|+2iz=11+8i$

e) $z^2-i\overline{z}+2=0$ *f)* $\frac{1-3i}{3z+2i}=\frac{2i-3}{5-2iz}$ *g)* $\frac{1+i}{z}=\frac{2-3i}{z}$ *h)* $z+i=\overline{z+i}$ *i)* $z^2=i$

j) $z^2=15+8i$ *k)* $z^2=8+6i$ *l)* $z^2=(\overline{z})^2$

Zadanie 5. *Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Rozwiąż układy równań. Rozwiązania podaj w postaci algebraicznej.*

a) $\begin{cases} z+iw=1 \\ iz+w=1+i \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{z}{2-i}+\frac{w}{1+i}=2 \\ \frac{5z}{(2-i)^2}+\frac{2w}{(1+i)^2}=3 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} (1+i)z+(1-i)w=1+i \\ (1-i)z+(1+i)w=1+3i \end{cases}$

Zadanie 6. *a) Oblicz i^{77} oraz i^{99}.*
b) Wyznacz wszystkie liczby $z \in \mathbb{C}$, takie, że $z^2 \in \mathbb{R}$.
c) Wyznacz wszystkie liczby zespolone sprzężne do swojego kwadratu.
d) Oblicz $\frac{i^{4n+1}-i^{4n-1}}{2}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.
e) Uzasadnij, że $(4i-5)^{8n+10}+(4+5i)^{8n+10}=0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
f) Niech $m, n \in \mathbb{N}$ będą dowolne. Uzasadnij, że poniższy układ równań nie ma rozwiązań.

$$\begin{cases} z^n = 2+\sqrt{3}i \\ z^m = \sqrt{2}+\sqrt{2}i \end{cases}$$

g) Uzasadnij, że jeśli liczba $z \in \mathbb{C}$ spełnia równanie $10(z-i)^n = (6+8i)(1-iz)^n$, $n \in \mathbb{N}$ to wówczas $Im(z)=0$.
h) Liczba $z \in \mathbb{C}$ spełnia równanie $z+1+8i=|z|(1+i)$. Uzasadnij, że wówczas $|z|^2-18|z|+65=0$ i na tej podstawie wskaż rozwiązania wyjściowego równania.

WSKAZÓWKI: f) Oblicz $|z|$. g) Oblicz moduł lewej i prawej strony równania.

2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

Zadanie 7. *Oblicz.*

a) $|\frac{1+2i}{3-2i}|$ *b)* $|\overline{\sqrt{3}+i}|$ *c)* $|(1-i\sqrt{10})^{12}|$ *d)* $|(1-\sqrt{7}i)(1+\sqrt{7}i)|$

Zadanie 8. *Zapisz podane liczby zespolone w postaci trygonometrycznej i wykładniczej.*

a) $-i$ *b)* 1 *c)* $7+7i$ *d)* $1-\sqrt{3}i$ *e)* $-\sqrt{27}-3i$ *f)* $\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

g) $\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ *h)* $2+\sqrt{3}+i$ *i)* $-i\cos\alpha+\sin\alpha$ *j)* $\sin\alpha+i\cos\alpha$

k) $-\cos\alpha+i\sin\alpha$ *l)* $(1+i)(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ *m)* $1+i\mathrm{tg}\alpha$ *dla* $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$

n) $(\mathrm{tg}\alpha-i)^4$, $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ *o)* $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ *p)* $1-\mathrm{tg}^2\alpha+2i\mathrm{tg}\alpha$ *q)* $3+4i$

r) $\sin\frac{\pi}{5}+i(1-\cos\frac{\pi}{5})$

WSKAZÓWKI: g), h), o), r) Skorzystaj ze wzorów na sinus i cosinus kąta podwojonego.

Zadanie 9. *Niech* $z_1=2(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$, $z_2=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$, $z_3=3(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10})$. *Oblicz:*

a) z_1z_2 *b)* $z_1z_2z_3$ *c)* $\frac{z_1^2}{z_3^4}$ *d)* $\frac{z_1z_3^2}{z_2^3}$

Zadanie 10. *Korzystając z przedstawienia liczby* $z=(1+\sqrt{3}i)(1+i)$ *w postaci algebraicznej i trygonometrycznej wyznacz wartość* $\cos\frac{7}{12}\pi$.

Zadanie 11. *Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej wykonaj działania. Wynik podaj w postaci algebraicznej.*

a) $(1+i)^7$ *b)* $(1+i\sqrt{3})^{195}$ *c)* $(\cos 33^\circ+i\sin 33^\circ)^{10}$ *d)* $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^{24}$ *e)* $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20}$

f) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-\sqrt{3}i)^6}$ *g)* $(1-i\sqrt{3})^7(2-2i)^{21}$ *h)* $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, $n\in\mathbb{N}, n>2$

Zadanie 12. *Podane liczy zapisz w postaci algebraicznej.*

a) $e^{\frac{\pi}{2}i}$ *b)* e^{2i} *c)* $e^{\pi i}$ *d)* $e^{\frac{1}{2}-i\frac{\pi}{3}}$

Zadanie 13. *Uprość podane wyrażenia.*

a) $\frac{\cos 5\theta+i\sin 5\theta}{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}$ *b)* $\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^7}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^3}$ *c)* $\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos 2\theta-i\sin 2\theta}$ *d)* $\frac{(\cos\frac{9}{17}\pi+i\sin\frac{9}{17}\pi)^5}{(\cos\frac{2}{17}\pi-i\sin\frac{2}{17}\pi)^3}$

Zadanie 14. *Oblicz.*

a) $\frac{(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{3})^{12}}{i^{2014}}$ *b)* $\arg\left[\frac{(-\sqrt{12}+2i)^{23}}{(\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{6})^{17}}\right]$ *c)* $\arg(i-\mathrm{tg}\frac{\pi}{5})$ *d)* $\arg\left[\frac{(1-i)^5}{i^{11}(1+i\sqrt{3})^3}\right]$

Zadanie 15. *Wykorzystując postać wykładniczą, rozwiąż równania.*

a) $|z|\cdot z^2+i=0$ *b)* $|z|^4=iz^4$ *c)* $(\bar z)^6=4|z^2|$ *d)* $z^2=4\overline{z}$ *e)* $z^4\overline{z}=-32$ *f)* $z^7=\overline{z}i$

g) $z^6=(1+i)^3(i\overline{z})^2$ *h)* $|z|^2=\frac{4}{z^2}$ *i)* $-(\overline{z})^4=(-z)^3$ *j)* $(\overline{z})^2\cdot(-i)=-z^3$ *k)* $|z^8|=z^4$

l) $\overline{z^4}=z^2\cdot|z^2|$ *m)* $z^3|z|=(4-4\sqrt{3}i)\overline{z}$ *n)* $z^3\cdot|z^2|\cdot\overline{z}=64i$

o) $(\bar z)^4=(-z)^3\cdot(1+i\sqrt{3})^5\cdot(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{3})^8$

Zadanie 16. *Wykorzystując postać trygonometryczną, rozwiąż równania.*

a) $z^3=i$ *b)* $z^4=1$ *c)* $z^4=2-i\sqrt{12}$ *d)* $z^3=8$ *e)* $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$ *f)* $z^4=(\sqrt{3}-i)^{12}$

g) $z^4=\frac{-18}{1+i\sqrt{3}}$ *h)* $z^3=\frac{27-54i}{2+i}$ *i)* $(z-3)^4=(1+i)^{12}$ *j)* $z^4=(1-i)^6$

Zadanie 17. *Rozwiąż równania.*

a) $z^6=\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}$ *b)* $z^3=\left(-\sin\frac{2}{7}\pi+i\cdot\cos\frac{2}{7}\pi\right)^9$ *c)* $z^3=(\sqrt{12}-2i)^{21}(i-1)^{13}$

d) $z^3=\frac{\left(\cos\frac{7}{15}\pi+i\sin\frac{7}{15}\pi\right)^4}{\left(\cos\frac{4}{15}\pi-i\sin\frac{4}{15}\pi\right)^2}$ *e)* $z^4=\frac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$ *f)* $z^2=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{2e^{\frac{\pi}{3}i}}$ *g)* $\left(\frac{z+2}{\overline{z}+2}\right)^2=1$

Zadanie 18. *Korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzoru dwumianowego Newtona wyraź:*
a) $\cos 3x$ *przy pomocy* $\cos x$, *b)* $\sin 5x$ *przy pomocy* $\sin x$.

Zadanie 19. *Korzystając ze wzorów Eulera przedstaw podane wyrażenia za pomocą sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x.*
a) $\cos^5 x$ *b)* $\sin^5 x$ *c)* $\sin^4 x+\cos^4 x$

Zadanie 20. *Liczba* $z=-1+\sqrt{3}i$ *jest jednym z wierzchołków kwadratu. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego kwadratu, gdy jego środkiem jest:*

a) początek układu współrzędnych *b) punkt* $z_0=3+i$

Zadanie 21. *Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby* $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ *oraz* $w=\sqrt{3}-i$, *Rozważając odpowiednie kąty uzasadnij, że* $\arg(z+w)=\frac{\pi}{24}$ *oraz* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.

Zadanie 22. *a) Niech* $z,w\in\mathbb{C}$ *będą takie, że* $\overline{z}+i\cdot\overline{w}=0$, $\mathrm{Im}(z)>0$, $\arg(z-w)=\pi$. *Wyznacz* $\arg(z)$.
b) Niech $z,w\in\mathbb{C}$ *będą takie, że* $z+\overline{z}=2|z-1|$, $w+\overline{w}=2|w-1|$, $\arg(z-w)=\frac{\pi}{4}$. *Wyznacz* $\mathrm{Im}(z+w)$.
c) Niech $z,w,v\in\mathbb{C}$ *będą takie, że* $|z|=|w|=|v|=|\frac{1}{z}+\frac{1}{w}+\frac{1}{v}|=1$. *Wyznacz* $|z+w+v|$.
d) Niech φ *będzie argumentem głównym liczby z. Wyznacz argument główny liczby* $w=\frac{z}{10+|z|}$.

3 Równania wielomianowe

Zadanie 23. *Rozwiąż równania.*

a) $z^2-z+1=0$ *b)* $z^2-2z=2i-1$ *c)* $z^2-6z+11=0$ *d)* $z^2+2iz+3=0$

e) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$ *f)* $iz^2+(2+i)z+2=0$ *g)* $z^2-3z+3+i=0$

Zadanie 24. *Rozwiąż równania.*

a) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$ b) $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$ c) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$ d) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$

e) $z^4 - (18+4i)z^2 + 77 - 36i = 0$ f) $z^4 - (19-54i)z^2 + 448 - 414i = 0$ g) $z^6 + z^3 - i + 1 = 0$

h) $z^3 - 3z^2 + 6z - 4$ i) $5z^3 - 12z^2 + 5z - 2 = 0$ j) $z^6 + (i-1)z^3 - i = 0$ k) $z^7 + iz^4 - z^3 - i = 0$

l) $z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 8 = 0$

WSKAZÓWKI: l) $z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 8 = (z^2 + 2z)^2 + 6(z^2 + 2z) + 8$

Zadanie 25. *Rozwiąż równania.*

a) $(z - i)^4 = (z + i)^4$ b) $z^3 = (iz + 1)^3$ c) $\left(\frac{iz+2}{z-4i}\right)^4 = 1$ d) $z^4 = 81(1 - z)^4$

Zadanie 26. *Dokonaj rozkładu (faktoryzacji) podanych wielomianów na czynniki liniowe.*

a) $iz^2 - 4$ b) $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 - 8i$ c) $3z^4 - 3z^3 - 14z^2 - 11z - 3$ d) $z^5 - 4z^4 + 5z^3 - 6z + 4$

e) $z^3 + (2 - 6i)z^2 - (9 + 12i)z - 18$ f) $6iz^4 - 7z^3 + 4iz^2 - 7z - 2i$

Zadanie 27. *Dany jest wielomian $W(z)$ oraz jeden z jego pierwiastków z_0. Wyznacz pozostałe pierwiastki wielomianu.*

a) $W(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 6z + 6$, $z_0 = -1 + i$

b) $W(z) = z^3 - 7z^2 + 41z - 87$, $z_0 = 2 - 5i$

c) $W(z) = z^4 - 7z^3 + 27z^2 - 47z + 26$, $z_0 = 2 + 3i$

d) $W(z) = z^5 - 3z^4 + 8z^3 - 14z^2 + 16z - 8$, $z_0 = 1 + i$

e) $W(z) = 4z^4 - 24z^3 + 57z^2 + 18z - 45 = 0$, $z_0 = 3 + i\sqrt{6}$

Zadanie 28. *a) Oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $P(z) = z^5 + 3z^2 + 7iz + 1$ przez dwumian $Q(z) = z - i$.*
b) Liczba $z_1 = 4i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(z) = z^4 - 4iz^3 + 8iz + 32$. Wyznacz pozostałe pierwiastki.
c) Wyznacz wartość $2z^4 + 5z^3 + 7z^2 - z + 41$ dla $z = -2 - \sqrt{3}i$.
d) Dany jest wielomian $P(z) = 2z^2 - (3 + 8i)z - (a + 4i)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Wiedząc, że P ma pierwiastek rzeczywisty $x \in \mathbb{R}$, wyznacz oba pierwiastki P.

WSKAZÓWKI: c) Oblicz $(z + 2)^2$ i wykonaj dzielenie wielomianów.

Zadanie 29. *Skorzystaj ze wzorów Viète'a, rozwiązując poniższe przykłady.*

a) Wielomian $P(z) = 2z^3 - 5z^2 + cz - 5$, $c \in \mathbb{R}$ ma pierwiastek $1 - 2i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartość współczynnika c.

b) Wielomian $P(z)=z^3+a_2z^2+a_1z+26$, $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ ma pierwiastek $1+i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartości współczynników a_1,a_2.
c) Wielomian $P(z)=z^4-3z^3+az^2+bz+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ ma pierwiastki 2 oraz $1+2i$. Wyznacz wartości współczynników a,b,c.

4 Interpretacja geometryczna

<u>Zadanie</u> 30. *Narysuj na płaszczyźnie zespolonej podane zbiory.*

a) $\{z\in\mathbb{C}:|\frac{z-5}{z-1}|=1\}$ *b)* $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 3\ \wedge\ \mathrm{Re}(z)\in(0,1)\ \wedge\ \mathrm{Im}(z)>0\}$

c) $\{z\in\mathbb{C}:\arg(z)\in(0,\frac{\pi}{4})\ \wedge\ |z-1-i|\leq 2\}$

d) $\{z\in\mathbb{C}:2\leq|z+i|\leq 4\ \wedge\ \mathrm{Re}(iz-1)\leq 0\}$

e) $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z+1)=\mathrm{Im}(2z-4i)\ \wedge\ \mathrm{Re}(\frac{4-\bar{z}}{\bar{z}})<0\}$

f) $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}[(1+2i)z-3i]<0\ \wedge\ \mathrm{Re}(iz-4)\leq 0\}$

g) $\{z\in\mathbb{C}:2\leq|iz-5|<3\}$ *h)* $\{z\in\mathbb{C}:|\bar{z}-1-3i|\leq|3-4i|\ \wedge\ \mathrm{Re}(2-z)\leq 1\}$

i) $\{z\in\mathbb{C}:\sin(\pi|z+2i|)>0\}$ *j)* $\{z\in\mathbb{C}:3|z+i|\leq|z^2+1|<5|z-i|\}$

k) $\{z\in\mathbb{C}:|\frac{z+i}{z^2+1}|\geq 1\ \wedge\ |z^2-(\bar{z})^2|<4\}$ *l)* $\{z\in\mathbb{C}:|z+2|+|z-6|=10\}$

m) $\{z\in\mathbb{C}:z\bar{z}+(2i-3)z-(2i+3)\bar{z}-3=0\}$

n) $\{z\in\mathbb{C}:(z+2i)^4=16\}$, $\{z\in\mathbb{C}:|z+2i|^4=16\}$, $\{z\in\mathbb{C}:[\mathrm{Re}(z+2i)]^4=16\}$

o) $\{z\in\mathbb{C}:z^3=(1+i)^6\}$, $\{z\in\mathbb{C}:z^3=|1+i|^6\}$

p) $\{z\in\mathbb{C}:|z-6|=2|z+6-9i|\}$ *q)* $\{z\in\mathbb{C}:|z-1|=\mathrm{Re}(z+1)\}$

r) $\{z\in\mathbb{C}:|(z+i)^2|\geq|z^2+1|\}$ *s)* $\{z\in\mathbb{C}:|\bar{z}^2-z^2-8i|=0,\quad z^2+4z+5=0\}$

t) $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(2i)\leq|i\cdot\bar{z}-1-3i|<|6+\sqrt{13}\cdot i|\}$

u) $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)\neq 0\ \wedge\ \frac{|z+i\mathrm{Re}(z)|}{\mathrm{Im}z}\geq 1\}$ *v)* $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right)=-2\}$

w) $\{z\in\mathbb{C}:|z+2|-|z-2|=3\}$

<u>Zadanie</u> 31. *Narysuj na płaszczyźnie zespolonej podane zbiory.*

a) $\{z\in\mathbb{C}:\arg(z-2)=\frac{\pi}{3}\}$ *b)* $\{z\in\mathbb{C}:\arg(z+2-i)=\pi\}$

c) $\{z\in\mathbb{C}:\arg(z+3-2i)=\frac{3}{4}\pi\}$ *d)* $\{z\in\mathbb{C}:\arg(3z+i)=\pi\}$

e) $\{z\in\mathbb{C}:\arg(2z+4)=\frac{\pi}{4}\}$ *f)* $\{z\in\mathbb{C}:\arg(z+3i)\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})\}$ *g)* $\{z\in\mathbb{C}:\arg(\frac{i}{z})=\frac{3}{4}\pi\}$

h) $\{z\in\mathbb{C}:\arg(\bar{z}-1-2i)=\frac{3}{2}\pi\}$ *i)* $\{z\in\mathbb{C}:\arg(iz)\in(\pi,2\pi)\}$

j) $\{z\in\mathbb{C}:\arg[(-2+2i)z]\in[\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi]\}$ *k)* $\{z\in\mathbb{C}:\frac{\pi}{2}<\arg(z^3)<\pi\}$

l) $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z^6)<0\}$ *m)* $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z^3)\geq\mathrm{Im}(z^3)\}$ *n)* $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}[(\bar{z})^2]\leq\mathrm{Im}(z^2)\}$

o) $\{z\in\mathbb{C}:|z|=\arg z\}$ *p)* $\{z\in\mathbb{C}:|z+2\pi|\leq 2\pi\ \wedge\ |z+2\pi|\geq\arg(z+2\pi)\}$

q) $\{z\in\mathbb{C}:\arg(z-w_1)=\arg(z-w_2)\}$*, gdzie* $w_1,w_2\in\mathbb{C}$ *ustalone*

r) $\{z\in\mathbb{C}:\arg(z-w_1)=\pi+\arg(z-w_2)\}$*, gdzie* $w_1,w_2\in\mathbb{C}$ *ustalone*

s) $\{z\in\mathbb{C}:\arg(z-w_1)=\frac{\pi}{2}+\arg(z-w_2)\}$*, gdzie* $w_1,w_2\in\mathbb{C}$ *ustalone*

t) $\{z\in\mathbb{C}:\arg(\frac{z-2}{z+2})=\frac{\pi}{3}\}$ *u)* $\{z\in\mathbb{C}:\arg(\frac{z+i}{z-i})=\frac{\pi}{2}\}$ *v)* $\{z\in\mathbb{C}:\arg[\bar{z}(z+1)]\in[\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi]\}$

w) $\{z\in\mathbb{C}:\arg[(\bar{z}+i)(z+2)]\in[\frac{\pi}{2},\frac{5}{4}\pi]\}$

Zadanie 32. *a) Niech* $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$*. Uzasadnij, że* $\frac{1-z}{1+z}=-i\cdot\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$*.*
b) Korzystając z podpunktu a) zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\ \wedge\ \left|\frac{1-z}{1+z}\right|\leq\sqrt{3}\}.$$

Zadanie 33. *Nazwij podane przekształcenia płaszczyzny.*

a) $f(z)=-z$ *b)* $f(z)=iz$ *c)* $f(z)=-iz$ *d)* $f(z)=\bar{z}$ *e)* $f(z)=-\bar{z}$ *f)* $f(z)=i\bar{z}$

g) $f(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ *h)* $f(z)=z+k,\ k\in\mathbb{R}$

Odpowiedzi

1. *a)* $\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$ *b)* $\frac{4-2\sqrt{3}}{5}-\frac{2+4\sqrt{3}}{5}i$ *c)* $10+9\sqrt{3}i$ *d)* -1 *e)* $(\sqrt{2}+5)+(\sqrt{2}-5)i$ **2.** *a)* $x=\frac{29}{15},y=\frac{17}{15}$ *b)* $x_1=\frac{11-\sqrt{97}}{6},y_1=-\frac{11+\sqrt{97}}{4}$ *lub* $x_2=\frac{11+\sqrt{97}}{6},y_2=-\frac{11-\sqrt{97}}{4}$ *c)* $x=2,y=3$ **3.** *a)* $\mathrm{Re}(w)=\frac{2(x-\pi)}{(x-\pi)^2+y^2}$, $\mathrm{Im}(w)=\frac{-2y}{(x-\pi)^2+y^2}$ *b)* $\mathrm{Re}(w)=-2yx$, $\mathrm{Im}(w)=x^2-y^2$ *c)* $\mathrm{Re}(w)=\frac{x^2+x-y^2}{(x+1)^2+y^2}$, $\mathrm{Im}(w)=\frac{-2xy-y}{(x+1)^2+y^2}$ *d)* $\mathrm{Re}(w)=(x-y)(x+y-1)$, $\mathrm{Im}(w)=2xy-x+y$ **4.** *a)* $z\in\{0,-3,\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}i),\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}i)\}$ *b)* $z=\frac{3}{2}-2i$ *c)* $z=\sqrt{2}+i$ *lub* $z=-\sqrt{2}+i$ *d)* $z=4-3i$ *lub* $z=4-\frac{35}{3}i$ *e)* $z=i$ *lub* $z=-2i$ *f)* $z=-\frac{99+45i}{73}$ *g) brak rozwiązań* *h)* $z=x-i,\ x\in\mathbb{R}$ *i)* $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ *lub* $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ *j)* $z=4+i$ *lub* $z=-4-i$ *k)* $z=3+i$ *lub* $z=-3-i$ *l)* $z=x$ *lub* $z=yi$*, dla* $x,y\in\mathbb{R}$ **5.** *a)* $z=1-\frac{1}{2}i,w=\frac{1}{2}$ *b)* $z=2-i,w=i+1$ *c)* $z=i,w=i+1$ **6.** *a)* $i,-i$ *b)* $z=yi,\ y\in\mathbb{R}$ *c)* $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

lub $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ *d)* i *h)* $z=4-3i$ *lub* $z=12+5i$ **7.** *a)* $\sqrt{\frac{5}{13}}$ *b)* 2 *c)* 11^{12} *d)* 8

8. *a)* $1(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))=e^{-\frac{\pi}{2}i}$ *b)* $1(\cos 0+i\sin 0)=e^{0}$ *c)* $7\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=7e^{\frac{\pi}{4}i}$ *d)* $2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin-\frac{\pi}{3}))=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ *e)* $6(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi)=6e^{\frac{7}{6}\pi i}$ *f)* $\sqrt{4+2\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{4+2\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}$ *g)* $4(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=4e^{\frac{\pi}{12}i}$ *h)* $2\sqrt{2+\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=2e^{\frac{\pi}{12}i}$ *i)* $1(\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha))=e^{(\pi-\alpha)i}$ *j)* $1(\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha))=e^{(\frac{\pi}{2}-\alpha)i}$ *k)* $1(\cos(\frac{3}{2}\pi+\alpha)+i\sin(\frac{3}{2}\pi+\alpha))=e^{(\frac{3}{2}\pi+\alpha)i}$ *l)* $\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)+i\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha))=\sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{4}+\alpha)i}$ *m)* $\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}e^{\alpha i}$ *n)* $\frac{1}{\cos^4\alpha}(\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha)=\frac{1}{\cos^4\alpha}e^{4\alpha i}$ *o)* $2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2})=2e^{\frac{\alpha}{2}i}$ *p)* $\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha+1}(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha+1}e^{\frac{\alpha}{2}i}$ *q)* $5(\cos(\mathrm{arctg}\frac{4}{3})+i\sin(\mathrm{arctg}\frac{4}{3}))=5e^{i\mathrm{arctg}\frac{4}{3}}$ *r)* $2\sin\frac{\pi}{10}(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10})$ **9.** *a)* $2[\cos\frac{13}{40}\pi+\sin\frac{13}{40}\pi]$ *b)* $6[\cos\frac{5}{8}\pi+\sin\frac{5}{8}\pi]$ *c)* $\frac{4}{81}[\cos(-\frac{9}{20}\pi)+\sin(-\frac{9}{20}\pi)]$ *d)* $18[\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}]$ **10.** $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ **11.** *a)* $8\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$ *b)* -2^{195} *c)* $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ *d)* $(2+\sqrt{3})^{12}$ *e)* $2^{9}(1-\sqrt{3}i)$ *f)* $-32i$ *g)* $2^{39}(\sqrt{3}+i))$ *h)* $\frac{1}{2}\cdot i^{n-1}$ **12.** *a)* i *b)* $\cos 2+i\sin 2$ *c)* -1 *d)* $\sqrt{e}(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ **13.** *a)* $\cos 3\theta+i\sin 3\theta$ *b)* $\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ *c)* $\cos\theta+i\sin\theta$ *d)* -1 **14.** *a)* $\frac{1}{64}$ *b)* 0 *c)* $\frac{6}{5}\pi$

15. *a)* $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ *lub* $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ *b)* $z=0$ *lub* $z=|z|e^{(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2})i}$, $k\in\mathbb{Z}$ *c)* $z\in\{0,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i),\pm\sqrt{2}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\}$ *d)* $z=0$ *lub* $z=4e^{\frac{2}{3}k\pi i}$, $k=0,1,2$ *e)* $z\in\{1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\}$ *f)* $z=0$ *lub* $z=e^{(\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{4})i}$, $k=0,1,\ldots,7$ *g)* $z=0$ *lub* $z=\sqrt[8]{8}e^{(-\frac{\pi}{32}+k\frac{\pi}{4})i}$, $k=0,1,\ldots,7$ *h)* $z=\pm\sqrt{2}$ *i)* $z=0$ *lub* $z=e^{\frac{2}{7}k\pi i}$, $k=0,1,\ldots,6$ *j)* $z=0$ *lub* $z=e^{(\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}k\pi)i}$, $k=0,1,\ldots,4$ *k)* $z\in\{0,1,-1,i,-i\}$ *l)* $z=0$ *lub* $z=e^{k\frac{\pi}{3}i}$, $k=0,1,\ldots,5$ *m)* $z=0$ *lub* $z=2e^{-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}}$, $k=0,1,2,3$ *n)* $z=\sqrt{2}(1+i)$ *lub* $z=-\sqrt{2}(1+i)$ *o)* $z=0$ *lub* $z=2e^{(-\frac{2}{21}\pi+\frac{2}{7}k\pi)i}$, $k=0,1,\ldots,6$ **16.** *a)* $z\in\{-i,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\}$ *b)* $z\in\{1,i,-1,-i\}$ *c)* $z\in\{\sqrt{2}(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi),\sqrt{2}(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi),\sqrt{2}(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi),\sqrt{2}\}$ *d)* $z\in\{2,-1+\sqrt{3}i,-1-\sqrt{3}i\}$ *e)* $z\in\{2(\cos\frac{1}{4}\pi+i\sin\frac{1}{4}\pi),2(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi),2(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi)\}$ *f)* $z\in\{8,8i,-8,-8i\}$ *g)* $z\in\{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,,-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\}$ *h)* $z\in\{3i,3(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i),3(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)\}$ *i)* $z\in\{1+2i,5-2i,1-2i,5+2i\}$ *j)* $z=\sqrt[4]{8}e^{(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4})i}$, $k=0,1,2,3$ **17.** *a)* $z=\sqrt[12]{2}(\cos(-\frac{11}{72}\pi+k\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{11}{72}\pi+k\frac{\pi}{3})\}$, $k=0,1,2,3,4,5$ *b)* $z\in\{\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7},\cos\frac{11\pi}{7}+i\sin\frac{11\pi}{7},\cos\frac{25\pi}{7}+i\sin\frac{25\pi}{7}\}$ *c)* $z=2^{\frac{97}{6}}e^{(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi)i}$, $k=0,1,2$ *d)* $z=x$ *lub* $z=-2+iy$, *gdzie* $x,y\in\mathbb{R}$ **18.** *a)* $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ *b)* $\sin 5x=16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x$ **19.** *a)* $\cos^5 x=\frac{1}{16}[\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x]$ *b)* $\sin^5 x=\frac{1}{16}[\sin 5x-\sin 3x+\sin x]$ *c)* $\frac{1}{4}(3+\cos 4x)$ **20.** *a)* $-1+\sqrt{3}i,-i-\sqrt{3},1-\sqrt{3}i,i+\sqrt{3}$ *b)* $4-\sqrt{3}-3i,7+(4-\sqrt{3})i,2+\sqrt{3}+5i,-4+(\sqrt{3}-1)i$ **22.** *a)* $\frac{3}{4}\pi$ *b)* 2 *c)* 1 *d)* $\arg(w)=\varphi$

23. *a)* $z\in\{\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\}$ *b)* $z\in\{2+i,-i\}$ *c)* $z\in\{3-\sqrt{2}i,3+\sqrt{2}i\}$ *d)* $z\in\{-3i,i\}$ *e)* $z\in\{2i-1,3-i\}$ *f)* $z\in\{2i,-1\}$ *g)* $z\in\{1+i,2-i\}$ **24.** *a)* $z\in\{\pm 2i,\pm i\}$ *b)* $z\in\{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ *c)* $z\in\{4-i,4+i,-4+i,-4-i\}$ *d)* $z\in\{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\sqrt{2}+i\sqrt{2},-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\}$ *e)* $z\in\{2-i,-2+i,4+i,-4-i\}$ *f)* $z\in\{6-5i,-6+5i,3+i,-3-i\}$ *g)* $z\in\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-i,\sqrt[6]{2}(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi),\sqrt[6]{2}(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi),\sqrt[6]{2}(\cos\frac{21}{12}\pi+i\sin\frac{21}{12}\pi)\}$ *h)* $z\in\{1,1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i\}$ *i)* $z\in\{2,\frac{1-2i}{5},\frac{1+2i}{5}\}$ *j)* $z=e^{(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3})i}$, $k=0,1,\ldots,5$ *k)* $z\in\{1,-1,i,-i,\frac{\sqrt{3}-i}{2},-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\}$ *l)* $z\in\{-1+i,-1-i,-1+\sqrt{3}i,-1-\sqrt{3}i\}$ **25.** *a)* $z\in\{-1,0,1\}$ *b)* $z\in\{\frac{1}{1-i},[-\frac{1}{2}+(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)i]^{-1},[-\frac{1}{2}-(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)i]^{-1}\}$ *c)* $z\in\{-1+3i,3i,1+3i\}$ *d)* $z\in\{\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{9+3i}{10},\frac{9-3i}{10}\}$ **26.** *a)* $i(z-\sqrt{2}(1-i))(z+\sqrt{2}(1-i))$ *b)* $(z-1-\sqrt{3}-i)(z-1+\sqrt{3}-i)(z-1+2i)$ *c)* $3(z+1)(z-3)(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i)(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i)$ *d)* $(z-1)(z+1)(z-2)(z-1-i)(z-1+i)$ *e)* $(z+2)(z-3i)^2$ *f)* $(z-i)(z+i)(z+\frac{1}{2}i)(z+\frac{2}{3}i)$ **27.** *a)* $\sqrt{3}i,-\sqrt{3}i,-1-i$ *b)* $2+5i,2-5i,3$

c) $2+3i, 2-3i, 1, 2$ *d)* $1+i, 1-i, 1, 2i, -2i$ *e)* $3+i\sqrt{6}, 3-i\sqrt{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **28.** *a) iloraz* $z^4+iz^3-z^2+(3-i)z+10i+1$, *reszta* $-11+i$ *b)* $2i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}-i$ *c)* 6 *d)* $-\frac{1}{2}, 2+4i$ **29.** *a) pierwiastki:* $1+2i, \frac{1}{2}$, *parametr* $c=12$ *b) pierwiastki:* $1-i, -13$, *parametry* $a_1=-24, a_2=11$ *c)* $a=5, b=-1, c=-10$ **33.** *a) symetria środkowa względem* $z=0$ *b) obrót względem* $z=0$ *o kąt* $\frac{\pi}{2}$ *c) obrót względem* $z=0$ *o kąt* $\frac{3\pi}{2}$ *d) symetria względem osi rzeczywistej* *e) symetria względem osi urojonej* *f) rzut prostopadły na oś rzeczywistą* *g) translacja o wektor* $[k,0]$