

Macierze i wyznaczniki

Notacja:

I - macierz jednostkowa odpowiedniego stopnia

O - macierz zerowa odpowiedniego wymiaru

$M_{m \times n}(K)$ - zbiór macierzy o m wierszach i n kolumnach, o elementach z ciała K

$M_n(K)$ - zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała K

Jeśli nie wskazano inaczej lub nie wynika to z kontekstu, przyjmujemy $K = \mathbb{R}$.

1 Działania na macierzach, podstawowe typy macierzy

Zadanie 1. Zapisz macierz $A = [a_{ij}]$, jeśli:

a) $A \in M_{5 \times 3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = 2i + j - 1$ b) $A \in M_5(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \min\{i, j\} + 2$

Zadanie 2. Wykonaj podane działania na macierzach.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A - 3I$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A + B$, gdzie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{bmatrix} 4+i & 7-i \\ 5-i & 4+i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5+i & 1+3i \\ 2+i & -7i \end{bmatrix}$

e) $(1+2i) \cdot A$, gdzie $A \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{bmatrix} 1-i & 1-2i \\ 2+i & -i \end{bmatrix}$

f) $A = X^3 - 3X^2 + 2X^{-1}$, jeśli $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3. Oblicz iloczyn macierzy A i B (wykonaj te mnożenia, które są możliwe).

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$c) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$d) A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \quad \text{nad ciałem } \mathbb{C}$$

$$e) A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Zadanie 4. a) Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Oblicz $D = 2AB - C^T + 4I$.

b) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Oblicz A^3 oraz B^2, B^3, B^4 .

Zadanie 5. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Oblicz iloczyny.

a) AB b) BA c) A^2 d) B^2 e) AA^T f) BA^T g) $A^T A$ h) $B^T B$ i) AB^T

j) $A^T B$ k) $B^T A$ l) BB^T

Zadanie 6. a) Czy iloczyn dwóch macierzy niekwadratowych może być macierzą kwadratową?

b) Jakie warunki powinny być spełnione, aby iloczyn dwóch macierzy był tego samego wymiaru co jeden z czynników?

c) Jakie warunki powinny być spełnione, aby iloczyn dwóch macierzy był tego samego wymiaru co oba czynniki?

d) Czy w iloczynie $OA = O$ obie macierze zerowe muszą/mogą być tego samego wymiaru?

e) Podaj przykład macierzy A i B takich, że wykonalne są oba mnożenia AB i BA oraz $AB \neq BA$.

Zadanie 7. Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania macierzy, wykonaj działania.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 95 & 99 & 98 \\ 97 & 96 & 99 \\ 96 & 99 & 97 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 103 & 97 & 101 \\ 104 & 98 & 100 \\ 103 & 95 & 102 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 999 & 999 & 997 \\ 999 & 9999 & 996 \\ 999 & 1000 & 999 \end{bmatrix}$

Zadanie 8. a) Oblicz iloczyn AB , gdy: $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix}$.

b) Oblicz C^3 , gdy $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 9. a) Znajdź przykład dwóch niezerowych macierzy kwadratowych A i B stopnia 2 będących dzielnikami zera, tzn. takich że $AB = O$.

b) Jaki warunek muszą spełniać macierze kwadratowe tego samego stopnia A i B , by prawdziwa była równość $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$?

Zadanie 10. a) Wyznacz wszystkie macierze $A \in M_2(\mathbb{R})$ takie, że $A^2 = I$.

b) Wyznacz wszystkie macierze $A \in M_2(\mathbb{R})$ takie, że $A^2 = O$.

c) Wyznacz wszystkie macierze $A \in M_2(\mathbb{R})$ trójkątne górne takie, że $AA^T = I$.

Zadanie 11. Znajdź macierze X o elementach rzeczywistych spełniające podane równania macierzowe.

$$a) 2X - 3X^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad b) XX^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad c) X + X^T = O \quad d) X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 12. Wiedząc że $(AB)^T = B^T A^T$, udowodnij, że $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

Zadanie 13. Rozwiąż układ równań macierzowych
$$\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Zadanie 14. Macierz kwadratową A nazywamy macierzą symetryczną, gdy $A^T = A$, zaś antysymetryczną gdy $A^T = -A$.

a) Podaj przykład macierzy symetrycznej i antisymetrycznej.

b) Dana jest macierz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Oblicz $CC^T, C^T C$.

c) Uzasadnij, że dla dowolnej macierzy A (nie koniecznie kwadratowej) iloczyny AA^T oraz $A^T A$ są macierzami symetrycznymi.

2 Wyznaczniki

Zadanie 15. Oblicz wyznaczniki.

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 - \sqrt{2} & \sqrt{5} - 2 \\ \sqrt{5} + 2 & 1 + \sqrt{2} \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 2 & k^2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad e) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad f) \begin{vmatrix} 1+i & 4-i & i \\ 2+i & 4-3i & 3-i \\ i & 2-2i & 1-i \end{vmatrix}$$

$$g) \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ gdy } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 16. Korzystając z twierdzenia Laplace'a oblicz wyznaczniki.

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 0 & \sin x & \operatorname{ctg} x \\ \sin x & 0 & \sin x \\ \operatorname{ctg} x & \sin x & 0 \end{vmatrix}$$

Zadanie 17. Oblicz, wykorzystując własności wyznaczników.

$$\begin{array}{l}
 a) \begin{vmatrix} 783 & 776 \\ 897 & 889 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 191 & 91 \\ 151 & 72 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} \log 2 & \log 3 \\ \log 4 & \log 9 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{vmatrix} \quad e) \begin{vmatrix} 1 & 99 & 59 \\ 1 & 97 & 61 \\ 1 & 96 & 63 \end{vmatrix} \\
 f) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 9 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}, \quad g) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} \quad h) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad i) \begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} \\
 j) \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad k) \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Zadanie 18. Sprowadź macierze do postaci trójkątnej górnej i oblicz ich wyznaczniki.

$$\begin{array}{l}
 a) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad b) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad c) C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
 d) D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad e) E = \begin{bmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ n & n & n & \dots & n \end{bmatrix} \\
 f) F = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_1 & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Zadanie 19. a) Niech $A, B, C \in M_4(\mathbb{R})$ będą takie, że $\det A = 128, \det B = 4, \det C = 2$. Oblicz $\det(2BC^T) + \det[(AB)^T \cdot (2C)]$.

b) Wiedząc że $\det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = 5$, oblicz $\det \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\delta \end{bmatrix}$.

c) Niech A będzie macierzą kwadratową taką, że $\det(2A) = 48, \det(3A) = 108$. Czy jest możliwe, by $\det(4A) = 96$? Czy A może być macierzą stopnia 4?

d) Oblicz $\det(A^T \cdot 2B)$, jeśli $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ są macierzami stopnia 5 takimi, że $a_{ij} = \begin{cases} i+j & ; i=j \\ 2 & ; i \neq j \end{cases}, b_{ij} = \begin{cases} j-i & ; i+j > 2 \\ 0 & ; i+j \leq 2 \end{cases}$.

Zadanie 20. Jak zmieni się wartość wyznacznika stopnia n , jeśli

a) pierwszą kolumnę przestawimy na ostatnie miejsce, a pozostałe kolumny przesuniemy w lewo

zachowując ich porządek,

b) zapiszemy wiersze w odwrotnym porządku?

Zadanie 21. a) Uzasadnij, że wyznacznik macierzy antysymetrycznej nieparzystego stopnia jest równy zeru.

b) Jaką wartość ma wyznacznik, którego wiersze z parzystymi indeksami mają sumę równą sumie wierszy z nieparzystymi indeksami?

Zadanie 22. Rozwiąż równania z niewiadomą $x \in \mathbb{R}$.

$$a) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{bmatrix} = 0 \quad b) \det \begin{bmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 0 \quad c) \det \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix} = 0$$

Zadanie 23. a) Nie obliczając wyznacznika znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0.$$

b) Nie obliczając wyznaczników $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ uzasadnij, że dzielą się one przez 10.

Zadanie 24. W dogodny sposób oblicz wyznaczniki:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ -a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & -t \end{vmatrix} \quad e) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$f) \begin{vmatrix} 2a-b-3 & b-a & c-b \\ -a & a & b \\ -b-3 & a+b & a+b+c \end{vmatrix} \quad g) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & \dots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$h) \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_3 & c_3 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-1} & c_{n-1} & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_n & c_n & \dots & c_n & c_n \end{vmatrix} \quad i^*) \begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1 & a_2x_1 + b_2 & \dots & a_nx_1 + b_n \\ a_1x_2 + b_1 & a_2x_2 + b_2 & \dots & a_nx_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1x_n + b_1 & a_2x_n + b_2 & \dots & a_nx_n + b_n \end{vmatrix}$$

$$j) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad k) \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Zadanie 25. Oblicz wyznacznik macierzy A , obliczając w tym celu $(\det A)^2$, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

3 Odwracanie macierzy

Zadanie 26. Czy podane pary macierzy są do siebie odwrotne.

$$a) \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 13 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$$

Zadanie 27. Korzystając z definicji macierzy odwrotnej, wyznacz A^{-1} .

$$a) A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad b) A = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ i & 2+i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

Zadanie 28. Wyznacz dopełnienia algebraiczne elementów a_{12} i a_{21} macierzy

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 29. Postępując się metodą dopełnień algebraicznych, wyznacz A^{-1} .

$$a) A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad c) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad e) A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad f) A = \begin{bmatrix} 1+i & i & 1-i \\ i & i & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadanie 30. Postępując się algorytmem Gaussa (metodą bezwyznacznikową), wyznacz A^{-1} .

$$a) A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad b) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad c) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad d) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Zadanie 31. a) Wiedząc, że $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, udowodnij, że $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

b) Jakie są możliwe wartości $\det(A)$, jeśli $A \in M_n(\mathbb{R})$ oraz $A^2 + A^{-1} = \mathbf{0}$?

c) Niech $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ takie, że $\det(A) = 5$, $\det(AB) = 3$. Oblicz $\det(B^{-1}A^{-1}2A^T)$.

d) Niech macierze $A, B, C \in M_4(\mathbb{R})$ takie, że $\det A = 128$, $\det B = 4$, $\det C = 2$. Oblicz $\det(2BC^T)$ oraz $\det[(A^{-1}B)^T(2C)]^{-1}$.

Zadanie 32. Rozwiąż równanie macierzowe.

a) $X \cdot A = B$, gdy $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A \cdot X = B$, gdy $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A \cdot X = B$, gdy $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A \cdot (B + X) = C$, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A \cdot (X - C) = B^T$, gdy $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

f) $(AX + I)^T = (2A)^{-1}$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

g) $(X + I)^T A = 2A - I$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

h) $3X^{-1} = A^{-1}$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

i) $X^{-1} = A^{-1}B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

j) $A(X^{-1})^2 = \frac{1}{2}X^{-1}$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

k) $B(X^T + I)^{-1} = 2B^2A^T$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 33. Macierz A nazywamy macierzą **ortogonalną**, jeśli $A^T = A^{-1}$.

a) Wykaż, że ortogonalna jest macierz $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$.

b) Jakie wartości może przyjmować wyznacznik macierzy ortogonalnej?

c) Uzasadnij, że jeśli macierze A, B są ortogonalne, to A^{-1} , AB również są ortogonalne.

4 Rząd macierzy

Zadanie 34. Korzystając z definicji (za pomocą minorów), określ rzędy podanych macierzy.

$$\begin{aligned} a) & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & b) & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} & c) & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 12 & 6 \end{bmatrix} & d) & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & e) & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} & f) & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & -11 \end{bmatrix} \\ g) & \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 2+i \\ i & -3 & 2+3i \\ 2-i & 4-i & -2i \end{bmatrix} & h) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadanie 35. Wyznacz rząd następujących macierzy w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a) & \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & b) & \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix} & c) & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -a & -1 \\ 2 & a & 1 & 3 \end{bmatrix} & d) & \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \\ e) & \begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & a^2+a \\ 2 & 5a+10 & 3a^2+3a \\ 3 & 6a+15 & 4a^2+2a \end{bmatrix} & f) & \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadanie 36. Dobierz wartość parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, by rząd macierzy A był najmniejszy.

$$a) A = \begin{bmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \quad b) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 37. Korzystając z operacji nie zmieniających rzędu, oblicz rzędy podanych macierzy.

$$\begin{aligned} a) & \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{bmatrix} & b) & \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} & c) & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix} \\ d) & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadanie 38. Sprowadzając macierze do postaci schodkowej, określ ich rzędy.

$$\begin{array}{l}
a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 9 & 5 & 3 & 1 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & 5 & 4 & 11 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \\
e) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Zadanie 39. Określ rząd macierzy w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l}
a) \begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & 2 & p-1 \\ p+2 & 3 & p \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix} \\
d) \begin{bmatrix} p^2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & \frac{2}{p} & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & \frac{2}{p} & 2^p & 4 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 2 & 2p+1 & 2p+1 & 6p+2 \\ 2 & 4p+1 & 2p+1 & 7p+2 \\ 2 & 4p+1 & p & 5p \\ 4 & 4p+2 & 3p+1 & 10p+2 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Zadanie 40. Podaj możliwe wartości rzędu macierzy $A \in M_{7 \times 8}(\mathbb{R})$, jeśli dwa wiersze składają się z samych dwójek, dwa wiersze składają się z samych czwórek oraz ostatnią kolumnę można otrzymać dodając do siebie pozostałe kolumny pomnożone przez pewne stałe.

5 Struktura algebraiczna zbiorów macierzy

Zadanie 41. Uzasadnij, że zbiór macierzy nieosobliwych stopnia n o elementach z ciała K wraz z mnożeniem tworzy grupę. Oznaczamy ją symbolem $GL_n(K)$ i nazywamy ogólną grupą liniową.

Zadanie 42. Które z podanych zbiorów macierzy kwadratowych ustalonego stopnia n nad ciałem K tworzą grupę?

- zbiór macierzy symetrycznych z dodawaniem
- zbiór macierzy nieosobliwych z dodawaniem
- zbiór $Z = \{A \in M_n(K) : \det A = p\}$, $p \in K$ stała ustalona, z mnożeniem
- zbiór macierzy diagonalnych z dodawaniem
- zbiór macierzy diagonalnych z mnożeniem
- zbiór macierzy diagonalnych nieosobliwych z mnożeniem
- zbiór macierzy trójkątnych górnych z mnożeniem
- zbiór macierzy trójkątnych górnych z zerami na przekątnej z mnożeniem
- zbiór macierzy trójkątnych górnych z zerami na przekątnej z dodawaniem
- zbiór macierzy ortogonalnych z mnożeniem

Odpowiedzi

1. a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ 2. a) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ c)

$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 9+2i & 8+2i \\ 7 & 4-6i \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3+i & 5 \\ 5+5i & 2-i \end{bmatrix}$ f) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -24 & -14 \\ 7 & -38 \end{bmatrix}$ 3. a)

$AB = \begin{bmatrix} 11 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $AB = 1, BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $AB = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 25 & 26 & 27 \end{bmatrix}$ d)

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2i & -2i \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -1-i & 1-i \\ 1+3i & 1-i \end{bmatrix}$ e) $AB = BA = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$

4. a) $D = \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ b) $A^3 = \begin{bmatrix} 13 & -14 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^4 =$

0 5. a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 8 & 11 & 4 \\ 10 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 \\ 8 & 11 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ k)

$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ l) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 5 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ 6. a) tak b) jedna macierz kwadratowa c) obie macierze kwadratowe tego samego stopnia d) mogą, nie muszą 7. a) $\begin{bmatrix} 288 & 294 & 294 \\ 770 & 783 & 783 \\ 671 & 690 & 683 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 300699 & 300800 & 300202 \\ 301698 & 301798 & 301196 \\ 299700 & 299802 & 299209 \end{bmatrix}$ 8. a) $AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_4 \end{bmatrix}$ b) $C^3 =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$ 9. b) $AB = BA$ 10. a) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, gdzie $a^2 = 1 - bc$ b)

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, gdzie $a^2 = -bc$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 11. a)

$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ b) nie ma takich c) $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 13.

$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 14. b) $C^T C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 10 \end{bmatrix}, CC^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$ 15. a)

- 32 b) -2 c) 0 d) $2k^3 - 2k^2 - 4$ e) 11 f) $-2 + 19i$ g) 0 **16.** a) 80 b) -71 c) -516 d) 40 e) $\sin 2x$ **17.** a) 15 b) 11 c) 0 d) $\cos 2x$ e) 0 f) 18 g) -1 h) -81 i) 168 j) -178 k) 1 **18.** a) 52 b) 0 c) -8 d) $n!$ e) $(1)^{n-1}n!$ f) $b_1(b_2 - a_{12})(b_3 - a_{23}) \cdot \dots \cdot (b_n - a_{n-1,n})$ **19.** a) 16512 b) 20 c) *nie, nie* d) 0 **20.** a) *Zostanie pomnożona przez $(-1)^{n-1}$.* b) *Zostanie pomnożona przez $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.* **21.** b) 0 **22.** a) $x = -2$ lub $x = 1$ b) $x = -2$ lub $x = 0$ c) $x = -2$ lub $x = 1$ **23.** a) $x \in \{0, 2, 6\}$ **24.** a) 6 b) 567 c) $n!$ d) $(-1)^n [t^n - a_1 a_2 \dots a_n]$ e) 0 f) $ac(a - 3)$ g) $(-1)^{\binom{n}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$ h) $(-1)^{n+1} c_n \prod_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)$ i) 0 dla $n \geq 3$, $a_1 x_1 + b_1$ dla $n = 1$, $(a_1 b_2 - a_2 b_1)(x_2 - x_1)$ dla $n = 2$ j) $\prod_{k=1}^n (1 - x_k)$ k) $(-1)^{n+1} (a_0 + a_n) r^{n2^{n-1}}$ **25.** $\det A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ **26.** a) *tak* b) *nie* **27.** a) $\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} i + \frac{3}{4} & -\frac{9}{4}i + \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2}i + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}i - \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ **28.** $D_{13} = 4, D_{21} = 4$ **29.** a) $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 9 & -3 & -2 \\ -6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ f) $\frac{1}{3i-1} \begin{bmatrix} 4i & -4i & -1-i \\ -4i & 3+5i & 1+i \\ -i & i & i \end{bmatrix}$ **30.** a) $\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{17}{2} & -12 \\ \frac{13}{4} & -\frac{37}{2} & -12 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **31.** b) $-1, 1$ c) $\frac{40}{3}$ d) $128, 1$ **32.** a) $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ b) *nie istnieje* c) $X = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e) $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ f) $X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ g) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ h) $X = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 9 & 12 & 18 \\ 0 & -15 & 21 \end{bmatrix}$ i) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \end{bmatrix}$ k) $X = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ k) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{11}{12} \end{bmatrix}$ **33.** b) $-1, 1$ **34.** a) 2 b) 1 c) 1 d) 2 e) 1 f) 2 g) 3 h) 2 **35.** a) 2 dla $a \neq 4$, 1 dla $a = 4$ b) 2 dla dowolnego a c) 2 dla dowolnego a d) 3 dla $a \neq 3$, 2 dla $a = 3$ e) 3 dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -\frac{5}{2}\}$, 2 dla $a \in \{-1, -\frac{5}{2}\}$, 1 dla $a = 0$ f) 3 dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ **36.** a) $r(A) = 2$ dla dowolnego a b) $r(A) = 3$ dla $a \in \{-1, 0, 3\}$ **37.** a) 2 b) 2 dla $a = 3$, 3 dla $a \neq 3$ c) 2 d) 4 **38.** a) 3 b) 2 c) 4 d) 3 e) 4 **39.** a) 3 dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, 2 dla $a \in \{0, 2\}$ b) 2 dla dowolnego p c) 3 dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 1 dla $a = 0$ d) 4 dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, \frac{1}{2}\}$, 3 dla $a = \frac{1}{2}$, 2 dla $a = 2$ e) 3 dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, 2 dla $a \in \{-1, 0\}$ **40.** $4, 3, 2, 1$ **42.** grupy: a), c) tzw. specjalna grupa liniowa ozn. $SL_n(K)$, d), f), i), j) tzw. grupa ortogonalna ozn. $O_n(K)$