Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 5
WFiIS, informatyka stosowana, I rok
listopad 2023r.

Geometria analityczna

1 Działania na wektorach

Zadanie 1. *Oblicz długości podanych wektorów.*

a) $\vec{a} = [1, 2, 7]$ *b)* $\vec{b} = [\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{2}]$ *c)* $\overrightarrow{PQ}$, $P = (1, 2, 0)$, $Q = (3, 4, 6)$

d) $\vec{c} = [r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi]$, $r > 0, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$

e) $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 7\vec{c}$, *gdzie* $\vec{a} = [1, 2, 3], \vec{b} = [0, 0, 5], \vec{c} = [\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 1]$

Zadanie 2. *a) Dla jakich wartości parametrów* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *wektory* $\vec{a} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \alpha\hat{k}$, $\vec{b} = \beta\hat{i} + 9\hat{j} - 2\hat{k}$ *są kolinearne?*
b) Wyznacz wersor kolinearny z wektorem $\vec{c} = [2, 3, -1]$ *o zwrocie przeciwnym niż* $\vec{c}$.

Zadanie 3. *a) Znajdź cosinusy kierunkowe wektora* $\vec{a} = [1, -1, 2] \in \mathbb{R}^3$.
b) Wektor $\vec{u}$ *tworzy z osią* Ox *kąt* $\frac{\pi}{3}$, *zaś z osią* Oy *kąt* $\frac{2}{3}\pi$. *Wyznacz jego cosinusy kierunkowe jeśli* $|\vec{u}| = 2$.
c) Wektor $\overrightarrow{AB}$ *o początku w punkcie* $A = (-4, 2, 3)$ *ma długość* 14 *i cosinusy kierunkowe (z* Ox, Oy, Oz *odpowiednio)* $\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$. *Znajdź współrzędne puntu* B.
d) Oblicz współrzędne wektora $\vec{v}$ *o długości* 3 *i kątach kierunkowych (z* Ox, Oy, Oz *odpowiednio)* $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 120^\circ$.

Zadanie 4. *Dane są punkty* $A = (3, -1, 2)$, $B = (-1, 6, 0)$, $C = (4, 1, 3)$. *Znajdź podane wektory.*

a) wersor $\hat{u}$, *gdy* $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ *b)* $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ *c) rzut wektora* $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ *na oś* Oy

Zadanie 5. *Oblicz iloczyny skalarne podanych par wektorów.*

a) $\vec{a} = [-1, 5, 2]$, $\vec{b} = [3, 0, 7]$ *b)* $\vec{u} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{v} = 3\hat{i} - 2\hat{k}$

c) $\vec{u} = \vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{v} = 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$, *gdzie* $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ *to parami prostopadłe wersory*

Zadanie 6. *a) Dla jakich wartości parametru* t *wektory* $[1, t, -2t], [1, t, 7] \in \mathbb{R}^3$ *są prostopadłe?*
b) Dla jakich wartości parametrów t, s *wektor* $\vec{u} = [\frac{\sqrt{3}}{3}, t, s]$ *jest wersorem prostopadłym do wektora* $\vec{v} = [1, 1, 1]$*?*

Zadanie 7. *a) Dany jest trójkąt o wierzchołkach* $A = (1, 0, -1), B = (1, 2, 3), C = (-1, 1, 2)$. *Oblicz kąt przy wierzchołku* A *w trójkącie* ABC.
b) Oblicz kąt pomiędzy wektorami $\vec{u} = [1, 2, 7], \vec{v} = [0, 3, -1]$.
c) Oblicz kąt między wektorem $\vec{u} = [2, -1, 8]$ *a płaszczyzną* Oxz.
d) Oblicz kąt między wektorami $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$, *jeśli wiadomo, że wektory* $\vec{a} = 2\vec{u} + \vec{v}$ *i* $\vec{b} = -4\vec{u} + 5\vec{v}$ *są*

prostopadłe oraz $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
e) Oblicz kąt między wektorami $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*, jeśli wiadomo że* $|\vec{a}-\vec{b}|^2 + |\vec{a}+2\vec{b}|^2 = 20$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.

Zadanie 8. *Uzasadnij, że czworokąt o wierzchołkach* $A = (-3, 5, 6), B = (1, -5, 7), C = (8, -3, 1), D = (4, 7, -2)$ *jest kwadratem.*

Zadanie 9. *Oblicz iloczyn wektorowy* $\vec{a} \times \vec{b}$ *podanych par wektorów.*

a) $\vec{a} = [2, 7, 1]$, $\vec{b} = [-1, 3, -2]$ *b)* $\vec{a} = 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{k} + \hat{\imath} - 3\hat{j}$

c) $\vec{a} = 2\hat{p} + \hat{q} + \hat{r}$, $\vec{b} = \hat{p} + 3\hat{q} + 4\hat{r}$*, gdzie* $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}$ *to trójka parami prostopadłych wersorów o orientacji zgodnej z orientacja układu współrzędnych*

Zadanie 10. *a) Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli* $A = (1, 2, 3), B = (2, -3, 4), C = (7, 1, 0)$.
b) Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{a} = [3, -1, 2], \vec{b} = [1, 2, -1]$.
c) Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 1, -1), B = (6, -2, -5), C = (1, -2, -1)$*. Oblicz długość wysokości trójkąta opuszczonej z wierzchołka B.*
d) Oblicz pole powierzchni czworościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
e) Oblicz pole powierzchni równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Zadanie 11. *Oblicz iloczyn mieszany* $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ *podanych trójek wektorów.*

a) $\vec{a} = [2, 0, 3], \vec{b} = [1, 1, 1], \vec{c} = [-1, 3, 0]$ *b)* $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{r}$*, gdzie* $\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\right) = 3$

Zadanie 12. *a) Znajdź wektor* $\vec{u}$ *wiedząc, że jest on prostopadły do wektorów* $\vec{v} = [1, 2, -3]$, $\vec{w} = [-1, 4, 2]$ *i spełnia warunek* $\vec{u} \circ \vec{a} = -150$*, gdzie* $\vec{a} = [4, 5, 1]$.

b) Znajdź wektor $\vec{u}$ *wiedząc, że jest on prostopadły do wektorów* $\vec{b} = [2, 3, -1]$, $\vec{c} = [1, -2, 3]$ *oraz spełnia warunek* $\vec{u} \circ (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$*, gdzie* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *to wersory osi układu współrzędnych.*

Zadanie 13. *Dane są wektory* $\vec{a} = [3, -2, 1], \vec{b} = [1, 2, -1], \vec{c} = [-1, 4, 3]$*. Wyznacz*

a) $[(\vec{a} - 2\vec{b}) \times \vec{c}] \times [(\vec{a} \circ \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]$ *b)* $[(\vec{b} \circ \vec{c}) \cdot (2\vec{c} \times \vec{a})] \circ [(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{c})]$

Zadanie 14. *Uprość wyrażenie* $\vec{p} \times (2\vec{q} - \vec{r} + \vec{p}) + (2\vec{r} + \vec{q}) \times (\vec{p} - 2\vec{r})$ *jeśli* $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ *to trójka parami prostopadłych wektorów jednostkowych o orientacji zgodnej z orientacja układu współrzędnych.*

Zadanie 15. *a) Oblicz objętość czworościanu rozpiętego na wektorach* $\vec{a} = [0, 0,], \vec{b} = [2, 3, 0], \vec{c} = [1, 1, 7]$.
b) Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (1, 3, 2), B = (0, -1, 3), C = (3, 2, 1), D = (-2, 1, 6)$.
c) Oblicz wysokość czworościanu o wierzchołkach $A = (0, 0, 1), B = (1, 2, 3), C = (-2, 5, 6), D = (3, -2, 1)$ *opuszczoną z wierzchołka D.*

Zadanie 16. *a) Czy wektory* $\vec{a} = [1, 7, 0]$, $\vec{b} = [2, 2, 1]$, $\vec{c} = [-1, -2, -1]$ *są współpłaszczyznowe?*
b) Czy wektory $\vec{a} = [2, 2, 3]$, $\vec{b} = [1, 6, 1]$, $\vec{c} = [1, -4, 2]$ *są współpłaszczyznowe?*
c) Czy punkty $A = (0, 2, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (-1, -3, -5)$, $D = (0, 7, 7)$ *należą do jednej płaszczyzny?*

2 Płaszczyzna i prosta w $\mathbb{R}^3$

Zadanie 17. *Znajdź punkty przecięcia płaszczyzny* $2x - y + 7z - 2$ *z osiami układu.*

Zadanie 18. *Dla jakich wartości* $m \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ *płaszczyzny opisane równaniami* $4x - 3y + 6kz - 8 = 0$ *i* $2mx + y - 4z + 4 = 0$ *są równoległe?*

Zadanie 19. *a) Napisz równanie ogólne płaszczyzny danej równaniem parametrycznym*

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + t + s \\ y = 3 + t - s \\ z = 6 + t \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

b) Napisz równanie parametryczne płaszczyzny danej równaniem ogólnym $x + y - 2z + 7 = 0$.

Zadanie 20. *Napisz równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny* π*:*
a) przechodzącej przez punkty $A = (1, 2, 0), B = (2, 1, 1), C = (3, 0, 1)$,
b) przechodzącej przez punkty $A = (1, 0, -1), B = (-2, 1, 3), C = (7, 2, 5)$,
c) przechodzącej przez punkt $M = (0, 1, 2)$ *i równoległej do wektorów* $\vec{a} = [2, 0, 1], \vec{b} = [1, 1, 0]$, *d) przechodzącej przez punkt* $M = (1, 5, 1)$ *i rozpiętej na wektorach* $\vec{u} = [-2, 1, 3]$, $\vec{v} = [1, 4, -1]$,
e) zawierającej punkt $M = (0, 1, 2)$ *oraz prostą*

$$l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

f) przechodzącej przez punkty $P = (2, 1, 3), Q = (-1, 2, 1)$ *i równoległej do osi* Oz,
g) przechodzącej przez punkt $M = (3, 5, 7)$ *i prostopadłej do płaszczyzn* $\pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 3x + y - z + 2 = 0$,
h) prostopadłej do płaszczyzny $\pi_1 :\ x + 2y + 3z - 12 = 0$ *i zawierającej prostą .*

$$l : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

i) wyznaczonej przez dwie równoległe proste $l_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}, \quad l_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$
j) przechodzącej przez proste (o ile to możliwe)

$$l_1 : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = -6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad l_2 : \begin{cases} x + 5y + 4z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Zadanie 21. *a) Czy podane równania przedstawiają tę samą płaszczyznę?*

$$\pi_1 : \begin{cases} x = -2 - t + s \\ y = 4 + 3t - 2s \\ z = 6 - s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R} \qquad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2 + t - s \\ z = 3 - t - 2s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

b) Czy podane płaszczyzny są równoległe?

$$\pi_1 :\ 2x + 3y - 5z + 7 = 0, \qquad \pi_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = -2s + t \\ z = 3 - 4s - t \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 22. *Napisz równanie płaszczyzny:*
a) dwusiecznej (jednej z dwóch) kąta między płaszczyznami $\pi_1 : 2x - y + 5z + 3 = 0$ *i* $\pi_2 : x - 5y + 2z - 1 = 0$,
b) przechodzącej przez oś Oz *i tworzącej z płaszczyzną* $2x + y + \sqrt{5}z - 1 = 0$ *kąt* $60°$.

Zadanie 23. *Napisz równanie płaszczyzny* π *przechodzącej przez punkt* $M = (1, 1, 1)$ *i równoległej do płaszczyzny* $\pi_1 : -2x + y - z + 1 = 0$. *Oblicz odległość między tymi płaszczyznami.*

Zadanie 24. *Napisz równanie prostej* l*:*
a) przechodzącej przez punkty $A = (1, 2, 3), B = (3, 4, 5)$,
b) przechodzącej przez punkt $A = (1, 5, 3)$ *i równoległej do prostej* $k : \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$,
c) przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 3, 1)$ *i prostopadłej do płaszczyzny* $5x - 3y + 2z - 1 = 0$,
d) przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 3, 1)$ *i równoległej do płaszczyzn* $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Zadanie 25. *Napisz równanie krawędziowe prostej przechodzącej przez punkt* $P_0 = (2, 3, 1)$ *i prostopadłej do prostych* $l_1 : \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$, oraz $l_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$.

Zadanie 26. *Napisz równanie parametryczne prostej danej równaniem krawędziowym.*

a) $l : \begin{cases} 6x + 2y - z + 9 = 0 \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ *b)* $l : \begin{cases} x + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases}$

Zadanie 27. *Napisz równanie parametryczne prostej danej równaniem kierunkowym.*

a) $l : 3x - 3 = 6 - y = 2z - 8$ *b)* $l : \frac{3x+9}{4} = y + 1 = \frac{24-3z}{7}$

Zadanie 28. *Dana jest prosta* $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$. *Znajdź:*
a) punkty przecięcia prostej l *z płaszczyznami układu* $Oxyz$,
b) równanie prostej w postaci kierunkowej,
c) równanie prostej w postaci krawędziowej.

Zadanie 29. *Dla jakiej wartości parametru* B *prosta* $l : \begin{cases} x + By - z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ *jest równoległa do płaszczyzny* $\pi : x + y + z = 0$*?*

Zadanie 30. *a) Czy punkty* $A = (1, -2, 5)$, $B = (3, -2, 11)$ *należą do prostej* $l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-5}{-3}$*?*
b) Czy prosta $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ *jest zawarta w płaszczyźnie* $\pi : 3x + 3y + z - 6 = 0$*?*
c) Czy prosta $l : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ *jest zawarta w płaszczyźnie* $\pi : 2x - z = 2$*? Czy ma nieskończenie wiele punktów wspólnych z płaszczyzną* $\pi_1 : x + y = z$*?*
d) Czy wektor $\vec{a} = [0, 2, 1]$ *jest prostopadły do prostej* $l : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ *?*

Zadanie 31. *Napisz równanie parametryczne i kierunkowe prostej, będącej dwusieczną kąta utworzonego przez przecinające się proste l_1, l_2.*

a) $l_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad l_2 : \begin{cases} x = -2 + s \\ y = 4 - 3s \\ z = 6 + 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$

b) $l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad l_2 : \begin{cases} x = -6 + 4s \\ y = 1 - 3s \\ z = -29 - 12s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$

Zadanie 32. *a) Czy prosta* $l : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ *jest równoległa do płaszczyzny* $\pi : x + y - z + 3 = 0$*?*

b) Czy podane równania krawędziowe przedstawiają tę samą prostą?

$$l_1 : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ 3x - 4y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 33. *Wyznacz punkt przecięcia:*

a) prostych $l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$ *oraz* $l_2 : x + 1 = \frac{y+11}{2} = z + 1$*,*

b) prostej $l : x - 1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ *i płaszczyzny* $\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$*,*

c) płaszczyzn

$$\pi_1 : \begin{cases} x = r \\ y = -2r - s \\ z = 4r + 3s \end{cases}, \ r, s \in \mathbb{R}, \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + t - u \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, \ t, u \in \mathbb{R}, \quad \pi_3 : \begin{cases} x = 2 + v \\ y = 3 - 2w \\ z = 3 - w \end{cases}, \ v, w \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 34. *Dany jest czworościan o wierzchołkach* $A = (1, 1, 1), B = (2, 0, 2), C = (2, 2, 2), D = (3, 4, -3)$*. Oblicz objętość tego czworościanu oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka* D*.*

Zadanie 35. *Oblicz odległość:*

a) punktu $A = (2, 0, 3)$ *od płaszczyzny* $\pi : 2x - 3y + z + 1 = 0$*,*

b) płaszczyzn równoległych $\pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0$*,* $\pi_2 : 2x - 6y + 4z = 0$*,*

c) punktu $O = (0, 0, 0)$ *od prostej* $l : \frac{x-1}{2} = -y - 1 = \frac{z-3}{-2}$*,*

d) prostych równoległych $l_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ *oraz* $l_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 4s \\ z = 6s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$*,*

e) prostych skośnych $l_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad l_2 \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$*,*

f) prostej $l : \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ *od płaszczyzny* $\pi : x + y - z + 7 = 0$*.*

Zadanie 36. *Dany jest czworościan o wierzchołkach* $O = (0, 0, 0), A = (0, 0, 1), B = (2, 0, 0), C = (1, 4, 3)$*. Oblicz:*

a) długość wysokości czworościanu poprowadzonej z wierzchołka A*,*

b) długość wysokości trójkąta ABC *poprowadzonej z wierzchołka* C*,*

c) odległość prostych l_{BC} *i* l_{OA} *(ozn.* l_{BC} *- prosta przechodząca przez* B *i* C*),*

d) miarę kąta przy wierzchołku C *w trójkącie* ABC*.*

<u>Zadanie</u> 37. *Dane są dwie płaszczyzny* $\pi_1 : 2x - 3y + z = 0$ *oraz* $\pi_2 : 4x - 6y + 2z - 3 = 0$.
a) Jakie jest wzajemne położenie tych płaszczyzn?
b) Jaka jest odległość między nimi?
c) Napisz równanie płaszczyzny równoległej do płaszczyzn π_1, π_2 *i jednakowo od każdej z nich oddalonej.*

<u>Zadanie</u> 38. *Zbadaj wzajemne położenie prostych.*
a) $k : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad l : \begin{cases} x = s \\ y = -3 + s \\ z = -1 - 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$
b) $k : \begin{cases} 3y - z + 1 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}, \quad l : \frac{x-2}{3} = -y = \frac{z-1}{2}$.

<u>Zadanie</u> 39. *Oblicz miarę kąta między:*
a) prostą $l : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ *i płaszczyzną* $\pi : x + y + 2z - 3 = 0$,
b) prostą przechodzącą przez punkty $A = (3, 0, -1), B = (2, -1, 2)$ *i prostą przechodzącą przez punkty* $C = (-2, 1, 1), D = (3, 1, 3)$,
c) płaszczyznami $\pi_1 : 2x + 3y - z - 1 = 0$, $\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t \\ z = 2t + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$.

<u>Zadanie</u> 40. *Dana jest prosta* $l : \begin{cases} 2x + 3y + z - 8 = 0 \\ x + 4y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$. *Jak wygląda równanie pęku płaszczyzn przechodzących przez prostą* l*?*

<u>Zadanie</u> 41. *Wyznacz rzut prostokątny:*
a) punktu $P = (3, 2, -1)$ *na płaszczyznę* $\pi : 2x - y + 3z = 0$,
b) punktu $P = (0, 2, 3)$ *na płaszczyznę* $\pi : \begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 2t - s \\ z = t + 3s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$,
c) punktu $P = (1, 1, 1)$ *na prostą* $l : 2x = 4y + 8 = 4 - 4z$,
d) punktu $P = (0, 2, 2)$ *na prostą* $l : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$
e) prostej $l : \frac{x-3}{-5} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-6}{8}$ *na płaszczyznę* $\pi : x + y + z = 0$,
f) prostej $l : \frac{x+2}{3} = \frac{1}{2}y = 3 - z$ *na płaszczyznę* $\pi : 3x + 2y - z + 2 = 0$,
g) prostej $l : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$ *na płaszczyznę* π *poprowadzoną przez prostą* $k : \begin{cases} 2x + 3y + z - 8 = 0 \\ x + 4y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ *równolegle do* l.

<u>Zadanie</u> 42. *Wyznacz rzut ukośny:*

a) punktu $P = (1, 2, -2)$ *na płaszczyznę* $\pi : x + y - 4z - 6 = 0$ *wzdłuż wektora* $\vec{v} = [-1, 3, 0]$,
b) punktu $P = (2, 6, 2)$ *na płaszczyznę* $\pi : 2x - y + 3z + 7 = 0$ *wzdłuż wektora* $\vec{v} = [8, -2, -6]$,
c) punktu $P = (3, 1, 0)$ *na prostą* $: \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 5 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ *wzdłuż wektora* $\vec{v} = [2, -3, 1]$,
d) punktu $P = (-2, 2, 1)$ *na prostą* $: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{3}$ *wzdłuż wektora* $\vec{v} = [-1, -1, 1]$.

Zadanie 43. *Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $A=(1,0,-1)$, równoległej do płaszczyzny $\pi: 3x-2y-3z+3=0$ i przecinającej prostą $k: x-2=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{2}$.*

Zadanie 44. *a) Dokonaj translacji punktu $P=(1,2,3)$ o wektor $\vec{v}=[2,3,7]$.*
b) Dane są dwa punkty $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ oraz $P_1=(x_1,y_1,z_1)$. Znajdź współrzędne punktu S, który jest środkiem odcinka $\overline{P_0P_1}$.
c) Dany jest punkt $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ oraz płaszczyzna $\pi: 3x-5y-2z=0$. Znajdź współrzędne punktu P', który jest punktem symetrycznym do P_0 względem płaszczyzny π.
d) Odcinek $\overline{A'B'}$ jest odcinkiem symetrycznym do odcinka $\overline{AB}$ względem płaszczyzny $\pi: 2x+y-z+3=0$. Znajdź odcinek $\overline{A'B'}$, jeśli $A=(0,-2,1)$, $B=(1,1,4)$.

Zadanie 45. *Wyznacz punkt symetryczny do punktu $P=(2,3,-1)$ względem:*
a) punktu $S=(1,-1,2)$, b) prostej $l: \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$, c) płaszczyzny $\pi: 2x-y+z-6=0$.

Zadanie 46. *Uzasadnij, że równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_i=(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,3$ można zapisać w postaci*

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Odpowiedzi

1. *a)* $3\sqrt{6}$ *b)* 4 *c)* $\sqrt{44}$ *d)* r *e)* $\sqrt{21}$ **2.** *a)* $\alpha=\frac{2}{3}$ *b)* $-\hat{a}=[\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}]$ **3.** *a)* $\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}$ *b)* $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ *c)* $B=(0,-4,-9)$ *d)* $\vec{v}=[\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}]$ **4.** *a)* $\hat{u}=[\frac{5}{\sqrt{59}},\frac{-5}{\sqrt{59}},\frac{3}{\sqrt{59}}]$ *b)* $[2,-1,\frac{4}{3}]$ *c)* $[0,\frac{1}{2},0]$ **5.** *a)* 11 *b)* 1 *c)* -1 **6.** *a)* $t=7\pm4\sqrt{3}$ *b)* $t=\frac{\sqrt{3}}{6}\pm\frac{1}{2}$, $s=-\frac{\sqrt{3}}{6}\mp\frac{1}{2}$ **7.** *a)* $\arccos\frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{5}}$ *b)* $\arccos\frac{1}{\sqrt{540}}$ *c)* $\arccos\sqrt{\frac{68}{69}}$ *d)* $\frac{\pi}{3}$ *e)* $\frac{\pi}{3}$ **9.** *a)* $[-17,3,13]$ *b)* $[3,-1,-3]$ *c)* $5\vec{r}-7\vec{q}+\vec{p}$ **10.** *a)* $\frac{\sqrt{1178}}{2}$ *b)* $\sqrt{74}$ *c)* 5 *d)* $P=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|+\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{c}|+\frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}|+\frac{1}{2}|(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})|$ *e)* $P=2|\vec{a}\times\vec{b}|+2|\vec{a}\times\vec{c}|+2|\vec{b}\times\vec{c}|$ **11.** *a)* -3 *b)* -9 **12.** *a)* $\vec{u}=[-32,-2,-12]$ *b)* $\vec{u}=[-3,3,3]$ **13.** *a)* $[-32,-448,-96]$ *b)* -2800 **14.** $\vec{r}-2\vec{p}+3\vec{q}$ **15.** *a)* $\frac{1}{6}$ *b)* $\frac{19}{6}$ *c)* $6\sqrt{2}$ **16.** *a), c) nie b) tak* **17.** $(1,0,0),(0,-2,0),(0,0,\frac{2}{7})$ **18.** $m=-\frac{2}{3},k=2$ **19.** *a)* $\pi: x+y-2z+7=0$ *b)* $\pi: \begin{cases} x=2+t+s \\ y=3+t-s \\ z=6+t \end{cases}$, $t,s\in\mathbb{R}$ **20.** *a)* $\pi: x+y-3=0$, $\pi: \begin{cases} x=1+t+2s \\ y=2-t-2s \\ z=t+s \end{cases}$, $t,s\in\mathbb{R}$

b) $\pi: x-24y+6z+5=0$, $\pi: \begin{cases} x=1-3t+6s \\ y=t+2s \\ z=-1+4t+6s \end{cases}$, $t,s\in\mathbb{R}$ *c)* $\pi: -x+y+2z-5=0$, $\pi: \begin{cases} x=2t+s \\ y=1+s \\ z=2t \end{cases}$, $t,s\in\mathbb{R}$

d) $\pi: -13x+y-9z+17=0$, $\pi: \begin{cases} x=1-2t+s \\ y=5+t+4s \\ z=1+3t-s \end{cases}$, $t,s\in\mathbb{R}$ *e)* $\pi: x-2y+z=0$,

$\pi : \begin{cases} x = 2t - s \\ y = 1 + t + s \\ z = 2 + 3s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$ *f)* $\pi : -x - 3y + 5 = 0$, $\pi : \begin{cases} x = 2 - 3s \\ y = 1 + s \\ z = 3 + t - 2s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$

g) $\pi : -x + 7y + 4x - 60 = 0$, $\pi : \begin{cases} x = 3 + t + 3s \\ y = 5 - t + s \\ z = 7 + 2t - s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$ *h)* $\pi : -13x - y + 5z - 5 = 0$, $\pi :$ $\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 + 2t + 3s \\ z = 4 + 3t - 2s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$ *i)* $\pi : -6x + 20y + 11z - 1 = 0$, $\pi : \begin{cases} x = 2 + 3t - s \\ y = -1 + 2t + 3s \\ z = 3 - 2t - 6s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$

j) $\pi : \begin{cases} x = -1 + 4t + 2s \\ y = 1 + 4t + 2s \\ z = -6t - 3s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$ **21.** *a) tak* *b) nie* **22.** *a)* $x + 4y + 3z + 4 = 0$ *lub* $3x - 6y + 7z + 2 = 0$ *b) na przykład* $x + 3y = 0$ **23.** $\pi : -2x + y - z + 2 = 0$, $d(\pi, \pi_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

24. *a)* $: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ *b)* $: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ *c)* $: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

d) $: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 13t \\ z = 1 + 19t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **25.** $l : \begin{cases} 3x + y - z - 8 = 0 \\ -5x - 2y + 3z - 13 = 0 \end{cases}$ **26.** *a)* $l : \begin{cases} x = 6t \\ y = -1 - 15t \\ z = 7 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ *b)* $l : \begin{cases} x = 2t \\ y = 6 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **27.** *a)* $l : \begin{cases} x = 3 + \frac{1}{3}t \\ y = 6 - t \\ z = 4 + \frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b) $l : \begin{cases} x = -3 + \frac{4}{3}t \\ y = -1 + t \\ z = 8 - \frac{7}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **28.** *a)* $(0, 3, 10), (\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, 0), (\frac{3}{2}, 0, \frac{11}{2})$ *b)* $l : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3}$

c) na przykład $l : \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases}$ **29.** $B = -5$ **30.** *a) tak oba* *b) tak* *c) tak, tak* *d) nie* **31.** *a)* $l : \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 - t \\ z = 6 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, $l : \frac{x+2}{0} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-6}{5}$ *b)* $l : \begin{cases} x = -12 + 28t \\ y = \frac{11}{2} - 22t \\ z = -11 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, $l : \frac{x+12}{28} = \frac{y-\frac{11}{2}}{-22} = \frac{z+11}{-10}$ **32.** *a) tak* *b) nie* **33.** *a)* $(3, -3, 3)$ *b)* $(2, -3, 6)$ *c)* $(1, -1, 1)$ **34.** $3\sqrt{2}$ **35.** *a)* $\frac{8}{\sqrt{14}}$ *b)* $\frac{1}{\sqrt{14}}$ *c)* $\frac{1}{3}\sqrt{101}$ *d)* $3\sqrt{\frac{20}{21}}$ *e)* 1 *f)* $2\sqrt{3}$ **36.** *a)* $\frac{4}{5}$ *b)* $\sqrt{21}$ *c)* 8 *d)* $\sqrt{\frac{21}{26}}$ **37.** *a) są równoległe, bez punktów wspólnych* *b)* $\frac{3}{2\sqrt{14}}$ *c)* $2x - 3y + z - \frac{3}{4} = 0$ **38.** *a), b) proste skośne* **39.** *a)* $\arcsin\frac{2}{3}$ *b)* $\arccos\frac{1}{\sqrt{319}}$ *c)* $\arccos\frac{15}{\sqrt{294}}$ **40.** $(2x + 3y + z - 8) + \lambda(x + 4y - 2z + 3) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *parametr* **41.** *a)* $(\frac{10}{7}, -\frac{17}{14}, -\frac{19}{14})$ *b)* $(\frac{133}{66}, \frac{56}{66}, \frac{217}{66})$ *c)* $(\frac{5}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6})$ *d)* $(\frac{28}{59}, -\frac{29}{59}, \frac{85}{59})$ *e)* $\begin{cases} -2x + 13y - 11z + 20 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ *f) punkt* $(-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2})$ *g)* $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 5x - 10y + 20z - 69 = 0 \end{cases}$ **42.** *a)* $(\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, -2)$ *b) nie istnieje, bowiem* $\vec{v} \parallel \pi$ *oraz* $P \notin \pi$ *c)* $(-1, 7, -2)$ *d) nie istnieje, bowiem prosta* l *oraz prosta przechodząca przez* P *o kierunku* $\vec{v}$ *są skośne* **43.** $l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-3}$ **44.** *a)* $(3, 5, 10)$ *b)* $S = (\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2})$ *c)* $P' = (x_0 + 6t_0, y_0 - 10t_0, z_0 - 4t_0)$, *gdzie* $t_0 = -\frac{3}{38}x_0 + \frac{5}{38}y_0 + \frac{2}{38}z_0$ *d)* $A = A'$, $B' = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{13}{3})$ **45.** *a)* $(0, -5, 5)$ *b)* $(-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$ *c)* $(6, 1, 1)$