

Przekształcenia liniowe

Notacja:

$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ macierz odwzorowania liniowego φ w bazach \mathcal{B} i \mathcal{C}

$Aut(V)$ grupa automorfizmów przestrzeni liniowej V

UWAGA: $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ oraz $\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot)$, chyba że wyszczególniono inaczej.

1 Definicja odwzorowania liniowego

Zadanie 1. *Sprawdź, czy podane przekształcenia są liniowe.*

a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2y, 2z + 3y, y - 5x)$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (5x, x + 2)$

c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f$ - symetria względem osi Ox

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f$ - rzut prostokątny na płaszczyznę Oxz

e) $f : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \forall p \in \mathbb{R}_4[x] f(p)(x) = p''(x)$

f) $f : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \forall g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) : f(g)(x) = \int_a^b g(x) dx$

g) $f : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \forall A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) f(A) = \det(A)$

h) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^3 f(u) = u \circ v$, gdzie $v \in \mathbb{R}^3$ ustalony

i) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \forall u \in \mathbb{R}^3 f(u) = u \times v$, gdzie $v \in \mathbb{R}^3$ ustalony

j) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(u) = |u|$ długość wektora

k) $f : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}[0, 1], \forall g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : f(g)(x) = 2g(\frac{x}{2})$ dla $x \in [0, 1]$

l) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f$ - obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wokół punktu $(1, 2)$

m) $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], \forall p \in \mathbb{R}_2[x] : f(p)(x) = \int_0^x p(t)p'(t) dt$

n) $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^2, f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_1, a_2)$

$$o) f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$$

$$p) f : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x], f(p)(x) = p(x+1) - p(x)$$

$$q) f : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x], f(p)(x) = x \cdot p(x)$$

Zadanie 2. Odwzorowanie liniowe φ jest zadane poprzez poniższe przyporządkowania. Podaj wzór φ .

$$a) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(1, 3) = (1, 1), \varphi(3, 7) = (5, 7)$$

$$b) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(3, 4) = (3, 5, 7), \varphi(4, 5) = (4, 7, 9)$$

$$c) \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(1, 1, 1) = (1, 4, 6), \varphi(4, 5, 1) = (0, 3, 7), \varphi(4, 7, 4) = (1, 4, 9)$$

$$d) \varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \varphi(5x) = 10, \varphi(x+3) = 6, \varphi(x^2 - x) = 6x - 2$$

$$e) \varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \varphi : (x^2 + x) = 6x + 10, f(x-1) = 4, f(2x) = 8$$

2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Zadanie 3. Wyznacz jądro i obraz odwzorowania liniowego φ .

$$a) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ rzut prostokątny na oś } Ox$$

$$b) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt } \frac{\pi}{2} \text{ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara}$$

$$c) \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ symetria względem osi } Oy$$

$$d) \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ rzut prostokątny na płaszczyznę } Oyz$$

Zadanie 4. Wyznacz jądro i obraz odwzorowania liniowego φ , wskaż ich bazy i określ wymiary. Czy φ jest monomorfizmem / epimorfizmem?

$$a) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = (2x - y, 3y - 6x)$$

$$b) \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi(x, y, z) = (2x - y - z, x + y + 4z, 2x + y + 5z, -x - z)$$

$$c) \varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x, y, z, t) = (x + 2z + t, -2x + y - 3z - 5t, x - y + z + 4t)$$

$$d) \varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x], \varphi(p)(x) = (x^2 + 2x) \cdot p'(-x), x \in \mathbb{R}$$

$$e) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_3[x], \varphi(a, b) = ax^2 + ax + a$$

$$f) \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x, y, z) = (x - 3y + 2z, -2x + 6y - 4z)$$

$$g) \varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x, y, z, t) = (x + 2y + z - t, x + 2z + t, 2x + y + 3t)$$

$$h) \varphi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(A) = \text{tr}(A), \text{ tzn. } \varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$$

$$i) \varphi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = dx^2 + c + b + a$$

$$j) \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ odwzorowanie zerowe, tzn. } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \varphi(x, y, z) = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$$

Zadanie 5. Podaj wymiar przestrzeni $\text{Ker}(\varphi)$ dla odwzorowania liniowego φ .

$$a) \varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^8, \text{rank}(\varphi) = 5 \quad b) \varphi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ epimorfizm}$$

$$c) \varphi : V \rightarrow W \text{ i macierzą } \varphi \text{ pewnych bazach przestrzeni } V, W \text{ jest } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6. Czy odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $k > 0$ może być epimorfizmem?

Zadanie 7. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolnym odwzorowaniem liniowym. Niech $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x, y - f(x))$.

a) Uzasadnij, że g jest odwzorowaniem liniowym.

b) Wyznacz jądro g . Czy g jest izomorfizmem?

Zadanie 8. Niech $\Sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Sigma((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Uzasadnij, że $\Sigma \in \text{Aut}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Podaj wzór odwzorowania odwrotnego.

Zadanie 9. Znajdź przykład odwzorowania liniowego φ spełniającego podane warunki.

$$a) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{Ker}(\varphi) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}, \text{Im}(\varphi) = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 : 2r = 3s = 6t\}$$

$$b) \varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{Ker}(\varphi) = \{(x, -x, z, -z) : x, z, \in \mathbb{R}\}, \text{Im}(\varphi) = \{(s + t, s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

$$c) \varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \text{Ker}(\varphi) = \text{lin}\{x - 1, x^2 - 1\}, \text{Im}(\varphi) = \text{lin}\{x^2\}$$

$$d) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{Ker}(\varphi) = \text{Im}(\varphi) = \{(2t, 3t), t \in \mathbb{R}\}$$

$$e) \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(1, 2, 1) = (1, 1), \varphi(0, 1, -1) = (-2, 2), \text{Ker}(\varphi) = \{(t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$f) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ takie, że } \text{Ker}(f) = U \text{ oraz } g \circ f = 0, \text{ gdzie } U = \text{lin}\{u_1 = (0, -1, 1), u_2 = (1, 0, 1)\}, g : \mathbb{R}^2 \ni (s, t) \mapsto 3s - t \in \mathbb{R}$$

3 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Zadanie 10. Napisz macierze podanych odwzorowań liniowych względem baz standardowych rozważanych przestrzeni wektorowych.

$$a) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{symetria względem prostej } y = x$$

$$a) \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x, y) = (x + y, 3x - 6y, 4x - y)$$

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, rzut prostokątny na prostą $l : x = 2y = 4z$

c) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, $\varphi(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x)$

d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi(x, y, z) = (x + y, x + z, y - z, y + 2z)$

e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, rzut prostokątny na płaszczyznę $\pi : x + 2y + 4z = 0$

f) $\varphi : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, $\varphi(A) = A^T$

g) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(p)(x) = (p(0), p'(1), p''(2))$

h) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $\varphi(p)(x) = \frac{d^2}{dx^2} [(x^2 + 3x + 2) \cdot p(x)]$

Zadanie 11. Zapisz macierz odwzorowania liniowego $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (2x, y + z)$ w podanych bazach.

a) w \mathbb{R}^3 oraz w \mathbb{R}^2 bazy kanoniczne

b) w \mathbb{R}^2 baza kanoniczna, zaś w \mathbb{R}^3 baza $(u_1 = (1, 2, 0), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1))$

c) w \mathbb{R}^3 baza kanoniczna zaś w \mathbb{R}^2 baza $(v_1 = (1, 2), v_2 = (0, 1))$

d) w \mathbb{R}^3 baza $(u_1 = (1, 2, 0), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1))$, zaś w \mathbb{R}^2 baza $(v_1 = (1, 2), v_2 = (0, 1))$

Zadanie 12. Korzystając z definicji, zapisz reprezentacje macierzowe podanych odwzorowań liniowych we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych.

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x + y, 2x + y, x - 3y)$ w bazach $(u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1))$ oraz $(v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (0, 0, 1))$

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, φ - symetria względem osi Oy , w bazach $(u_1 = (-3, 5), u_2 = (2, 1))$ oraz $(v_1 = (2, 4), v_2 = (3, 1))$

c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(p)(x) = p'(x - 1)$, w bazach $(p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = \frac{x^2}{2}, p_3 = \frac{x^3}{3})$ oraz $(q_0 = 1, q_1 = x, q_2 = x^2)$

d) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{R}\}$ - ciało, $\varphi : K^3 \rightarrow K^2$, $\varphi(x, y, z) = (x + y, y - z)$, w bazach $(u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, \sqrt{2}, 0), u_3 = (0, 0, 1 + \sqrt{2}))$ oraz $(v_1 = (1, \sqrt{2}), v_2 = (\sqrt{2}, 0))$

e) $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$, w bazie $(1, x, x^2, \dots, x^n)$

f) $\int : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_{n+1}[x]$, w bazach $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n+1}$, gdzie $\mathcal{B}_i = (1, x, x^2, \dots, x^i)$ dla $i = n, n + 1$

g) $Ev_3 : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$, $Ev_3(p(x)) = p(3)$, w bazach $(1, x, \dots, x^n)$, $\{1\}$

h) $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(p)(x) = p(x + 1)$, w bazie $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$

i) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $\varphi(p)(x) = 3x \cdot p(-x)$, w bazach $\mathcal{B} = (b_1 = x^2 + 2x, b_2 = 3x - 1, b_3 = x - 5), \mathcal{C} = (c_1 = x^3 + x, c_2 = x^3 - x, c_3 = x^2 + 1, c_4 = x^2 - 1)$

Zadanie 13. a) Znajdź w bazach kanonicznych macierz odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takiego, że $\varphi(1, 1) = (0, 1)$, $\varphi(-1, 1) = (3, 2)$.

b) Dane jest odwzorowanie liniowe $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$. W przestrzeni \mathbb{R}^3 rozważamy bazę kanoniczną (e_1, e_2, e_3) . Wiedząc, że $g(e_1) = (1, -3, 2, 4)$, $g(e_2) = (5, -3, 0, 2)$, $g(e_3) = (-2, 0, 1, 1)$, znajdź $g(1, 2, -1)$ oraz jądro odwzorowania g .

Zadanie 14. Uzasadnij, że f jest odwzorowaniem liniowym. Zapisz macierz tego odwzorowania w bazach standardowych i wyznacz $\text{Ker} f$. Czy f jest monomorfizmem?

a) $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, $f(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 6p'(x)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $f(a, b) = (a + b)x^2 + (3a - b)x + 6a$

c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\forall w \in \mathbb{R}^3 f(w) = v \times w$, gdzie $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ to ustalony wektor niezerowy, zaś $v \times w$ oznacza iloczyn wektorowy

Zadanie 15. Czy ta sama macierz może reprezentować dwa różne odwzorowania liniowe? Dokładniej mówiąc, czy mogą istnieć bazy $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ i odwzorowania liniowe φ, ψ takie, że $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(\psi)$?

Zadanie 16. Dane jest odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że $f \neq 0$, $f \circ f = 0$ oraz baza $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$. Wyznacz macierz $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ jeśli wiadomo, że $f(v_2) = v_1$.

Zadanie 17. Rozważmy przestrzeń wektorową $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$. Znajdź macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = (2 + 3i)z$ przyjmując w \mathbb{C} bazę \mathcal{B} .

a) $\mathcal{B} = (b_1 = 1, b_2 = i)$ b) $\mathcal{B} = (b_1 = 1 + i, b_2 = 1 - i)$

Zadanie 18. Macierz odwzorowania liniowego $\varphi : U \rightarrow V$ w bazach $\mathcal{B}_U = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2)$ ma postać $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Znajdź macierz A' tego odwzorowania względem baz $\mathcal{B}'_U = (2u_1, u_3, u_2 + u_3)$, $\mathcal{B}'_V = (v_1 - v_2, 2v_1 + v_2)$.

Zadanie 19. Stosując wzór na zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, znajdź macierz odwzorowania liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ w zadanych bazach $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$.

a) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x - y, y - z)$, $\mathcal{B}'_V = (v_1 = (1, 2, 2), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (1, 1, 2))$, $\mathcal{B}'_W = (w_1 = (1, 1), w_2 = (1, 0))$

b) $V = \mathbb{R}_2[x], W = \mathbb{R}_3[x]$, $\varphi(p)(x) = 3xp(-x)$, $\mathcal{B}'_V = (p_1 = x^2 + 2x, p_2 = 3x - 1, p_3 = x - 5)$, $\mathcal{B}'_W = (q_1 = x^3 + x, q_2 = x^3 - x, q_3 = x^2 + 1, q_4 = x^2 - 1)$

Zadanie 20. Wyznacz wzór odwzorowania liniowego φ reprezentowanego w zadanych bazach przez macierz $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (b_1 = (8, 2), b_2 = (7, 1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (6, 7), c_2 = (4, 5))$,

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (b_1 = (2, 1), b_2 = (4, -1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, -1), c_2 = (2, 5))$,

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 0, 1), b_2 = (0, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$, \mathcal{C} - baza kanoniczna,

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

d) $\varphi : V \rightarrow V$, $V = \{a \cos \theta + b \sin \theta, a, b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B} = (b_1 = \cos \theta - \sin \theta, b_2 = \sin \theta)$, $\mathcal{C} = (c_1 = \cos \theta + \sin \theta, c_2 = \cos \theta)$,

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (b_1 = (1, 0, 1), b_2 = (4, -2, 1), b_3 = (-2, 3, 3))$,

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 21. a) Odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w bazach kanonicznych reprezentowane jest przez macierz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Czy wektor $v = (1, 3)$ należy do $\text{Im} \varphi$?

b) Odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ w bazach $\mathcal{B} = (b_1 = 1 + x, b_2 = x)$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 1), c_2 = (1, 0))$ jest reprezentowane przez macierz $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Znajdź obraz $p(x) = 2x - 1$ poprzez φ .

c) Podaj przykłady baz przestrzeni \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 , w których odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane wzorem $\varphi(x, y, z) = (x + y, z - y)$ jest reprezentowane przez macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Dany jest endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (x + 4y, 3x - y)$ oraz baza $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 1), b_2 = (3, 4))$ przestrzeni \mathbb{R}^2 . Znajdź taką bazę \mathcal{C} przestrzeni \mathbb{R}^2 , że

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

e) Endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w bazach $\mathcal{B} = (b_1 = (3, 1), b_2 = (5, 2))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (-1, 7), c_2 = (1, -6))$ jest reprezentowany przez macierz $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Wyznacz macierz $M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ tego odwzorowania w bazach $\mathcal{B}' = (b'_1 = (-1, 4), b'_2 = (-1, 3))$, $\mathcal{C}' = (c'_1 = (5, -6), c'_2 = (-4, 5))$.

f) Odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w bazach $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 2), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (1, 1, 2))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 1), c_2 = (1, 0))$ reprezentowane jest przez macierz $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Za pomocą macierzy $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ wyznacz obraz wektora $v = (1, 1, 4)$ poprzez φ .

Zadanie 22. Odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazach kanonicznych reprezentowane jest

przez macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- a) Wyznacz macierz $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ tego odwzorowania w bazach $\mathcal{B}' = (b'_1 = (1, 1, 1, 1), b'_2 = (1, 1, 1, 0), b'_3 = (1, 1, 0, 0), b'_4 = (1, 0, 0, 0))$, $\mathcal{C}' = (c'_1 = (0, -1, 0), c'_2 = (1, 0, 0), c'_3 = (1, 1, 1))$.
 b) Oblicz $\varphi(2, 0, 0, 1)$ na dwa sposoby, za pomocą A i za pomocą A' .
 c) Czy φ jest monomorfizmem lub epimorfizmem?

Zadanie 23. Odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dane jest za pomocą przyporządkowania.

$$\varphi(2, 3, 0, 0) = (-1, 3, -2, -3), \quad \varphi(0, 0, 1, 1) = (1, 0, -1, 0),$$

$$\varphi(1, 3, 0, 1) = (1, 4, -5, -4), \quad \varphi(0, 2, 1, 0) = (3, 1, -4, -1)$$

- a) Podaj wzór φ .
 b) Wyznacz jądro i obraz φ , wskaż ich bazy i określ wymiary. Czy φ jest monomorfizmem lub epimorfizmem?
 c) Wyznacz macierz A odwzorowania φ w bazach kanonicznych.
 d) Wyznacz macierz $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ odwzorowania φ w bazie

$$\mathcal{B}' = (b'_1 = (1, 0, 1, 0), b'_2 = (0, 0, 0, 1), b'_3 = (1, 1, 0, 0), b'_4 = (1, 1, 1, 0)).$$

- e) Wyznacz $\varphi(1, 2, 3, 4)$ na dwa sposoby, za pomocą A i za pomocą A' .

Zadanie 24. Dane są dwie macierze $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ -4 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) Jakie odwzorowania liniowe $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ (względem baz kanonicznych) reprezentują te macierze?
 b) Jakie odwzorowanie liniowe reprezentuje iloczyn AB ?

Zadanie 25. a) Czy odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (x + 3y, 2x - y)$ jest odwracalne? Jeśli tak, podaj wzór i macierz odwzorowania odwrotnego do φ w bazach standardowych.

- b) Przekształcenia liniowe $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określone są w bazach kanonicznych przez macierze

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podaj macierze odwzorowań $\varphi + \psi, 2\varphi, \varphi - 3\psi$.

- c) Dane są odwzorowania liniowe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (4x + 3y + z, 5x + 4y + 2z)$ oraz $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = (3x - y, 5x - 3y, 7x - 5y)$. Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzory odwzorowań $h = g \circ f$ oraz $\varphi = f \circ g$.

- d) Dane są odwzorowania liniowe f i g . Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania $h = g^2 \circ f$ oraz $h(1, 2, 0)$.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z), \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y) = (2x + y, z - y)$$

e) Dane są odwzorowania liniowe f, g, h . Za pomocą rachunku macierzowego uzasadnij, że h jest odwracalne i podaj macierz odwzorowania h^{-1} w bazach kanonicznych. Ponadto wyznacz wzór odwzorowania $\varphi = 3g \circ f + h^{-1}$.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x, y, z) = (x, y + z, x + z, z), \quad g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x, y, z, t) = (x + t, y - t, z - t)$$

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad h(x, y, z) = (x + 2y, x + z, x + y + z)$$

Odpowiedzi

1. odwzorowania liniowe: a), c), d), e), f), h), i), k), n), o), p), q) 2. a) $\varphi(x_1, x_2) = (4x_1 - x_2, 7x_1 - 2x_2)$ b) $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, 3x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ c) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 5x_1 - 4x_2 + 3x_3, 7x_1 - 5x_2 + 4x_3)$ d) $\varphi(ax^2 + bx + c) = 6ax + 2b + \frac{4}{3}c$ e) $\varphi(ax^2 + bx + c) = 6ax + 6a + 4b$ 3. a) $\text{Ker}(\varphi)$ - oś Oy , $\text{Im}(\varphi)$ - oś Ox b) $\text{Ker}(\varphi) = \{(0, 0)\}$, $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$ c) $\text{Ker}(\varphi) = \{(0, 0, 0)\}$, $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3$ d) $\text{Ker}(\varphi) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ oś Ox , $\text{Im}(\varphi)$ - płaszczyzna Oyz 4. a) $\text{Ker}(\varphi)$ - prosta $y = 2x$, baza $\{(1, 2)\}$; $\text{Im}(\varphi) = \{(2x - y, 3y - 6x) : x, y \in \mathbb{R}\}$, baza $\{(-1, 3)\}$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(\text{Im}(\varphi)) = 1$, nie monomorfizm, nie epimorfizm b) $\text{Ker}(\varphi) = \{(-t, -3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$, baza $\{(-1, -3, 1)\}$; $\text{Im}(\varphi) = \{(2x - y - z, x + y + 4z, 2x + y + 5z, -x - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, baza $\{(2, 1, 2, -1), (-1, 1, 1, 0)\}$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1$, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 2$, nie monomorfizm, nie epimorfizm c) $\text{Ker}(\varphi) = \{(-2z - t, -z + 3t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\}$, baza $\{(-2, -1, 1, 0), (-1, 3, 0, 1)\}$; $\text{Im}(\varphi)$ płaszczyzna $\pi : x = t, y = -2t + s, z = t - s, t, s \in \mathbb{R}$, baza $\{(1, -2, 1), (0, 1, -1)\}$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(\text{Im}(\varphi)) = 2$, nie monomorfizm, nie epimorfizm d) $\text{Ker}(\varphi) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = \text{const}\}$, baza $\{q(x) = 1\}$; $\text{Im}(\varphi) = -2ax^3 + (b - 4a)x^2 + 2bx$, dla $p(x) = x^2 + bx + c$, baza $\{-2x^3 - 4x^2, x^2 + 2x\}$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1$, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 2$, nie monomorfizm, nie epimorfizm e) $\text{Ker}(\varphi) = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(0, 1)\}$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1$; $\text{Im}(\varphi) = \text{lin}\{x^2 + x + 1\}$, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 1$, nie monomorfizm, nie epimorfizm f) $\text{Ker}(\varphi) = \text{lin}\{(3, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$, $\text{Im}(\varphi) = \text{lin}\{(1, -2)\}$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2$, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 1$, nie epimorfizm g) $\text{Ker}(\varphi) = \text{lin}\{(3, -\frac{9}{7}, \frac{4}{7}, 1)\}$, $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1$, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 3$, epimorfizm, nie monomorfizm h) $\text{Ker}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, baza $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 3$; $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 1$, epimorfizm, nie monomorfizm i) $\text{Ker}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} -b - c & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}$, baza $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2$; $\text{Im}(\varphi) = \{rx^2 + s : r, z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{1, x^2\}$, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 2$, nie monomorfizm, nie epimorfizm j) $\text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}^3$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 3$; $\text{Im}(\varphi) = \{(0, 0, 0, 0)\}$, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 0$, nie monomorfizm, nie epimorfizm
5. a) 0 b) 3 c) 3 6. nie 7. izomorfizm 8. $\Sigma^{-1}((S_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $a_1 = S_1$ oraz $\forall k \geq 2 \ a_k = S_{k+1} - S_k$. 9. a) $\varphi(x, y) = (3cy, 2cy, cy)$, $c \neq 0$ b) $\varphi(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - z - t)$ c) $\varphi(p) = x^2 \cdot p(1) = (a + b + c)x^2$, dla $p(x) = ax^2 + bx + c$ d) $\varphi(x, y) = (6x - 4y, 9x - 6y)$ e) $\varphi(x, y, z) = (-4x + y + 3z, y - z)$ f) $f(x, y, z) = (-x + y + z, -3x + 3y + 3z)$ 10. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad b) \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e) \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 20 & -2 & -4 \\ 19 & -4 & -2 \\ 17 & -8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad h) \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 24 \\ 0 & 0 & 12 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad 11. \quad a) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad 12. \quad a) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix} \quad c)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix}$$

$$g) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3^2 \\ \dots \\ 3^n \end{bmatrix}^T \quad h) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{n}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad i) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 15 \\ 3 & 3 & 15 \\ -6 & -9 & -3 \\ -6 & -9 & -3 \end{bmatrix} \quad 13. \quad a) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b) g(1, 2, -1) = (13, -9, 17), \text{ Ker}(g) = \{(x, -x, -2x) : x \in \mathbb{R}\} \quad 14. \quad a) \begin{bmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\text{Ker } f = \{a : a \in \mathbb{R}\}, \text{ nie monomorfizm} \quad b) \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ Ker } f = \{(0, 0)\}, \text{ monomorfizm} \quad c)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ Ker } f = \{a \cdot v \mid a \in \mathbb{R}\} \text{ wektory równoległe do } v, \text{ nie monomorfizm} \quad 15.$$

$$\text{tak} \quad 16. \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 17. \quad a) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad 18. \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -14 & -9 & -17 \\ 10 & 9 & 16 \end{bmatrix}$$

$$19. \quad a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -15 \\ 3 & 3 & 15 \\ -6 & -9 & -3 \\ -6 & -9 & -3 \end{bmatrix} \quad 20. \quad a) \varphi(x, y) = (x + y, x + 2y) \quad b)$$

$$\varphi(x, y) = (3x + 7y, 4x + 7y) \quad c) \varphi(x, y, z) = (x + y, -2x - 4y + 5z) \quad d) \varphi(a \cos \theta + b \sin \theta) = a \cos \theta$$

$$e) \varphi(x, y, z) = (-105x - 165y + 94z, 39x + 61y - 33z, -50x - 79y + 48z) \quad 21. \quad a) \text{tak} \quad b) \varphi(p) = (3, 1) \quad c) \mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, -1)\}, \mathcal{C} = \{(1, -1), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\} \quad d) \mathcal{C} = \{(4, 1), (7, 2)\}$$

$$e) M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} \quad f) \varphi(v) = [-3, 3]_{\mathcal{C}} = (0, -3) \quad 22. \quad a) A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \varphi(2, 0, 0, 1) = (5, 3, 2) \quad c) \text{nie monomorfizm, ale epimorfizm} \quad 23. \quad a) \varphi(x, y, z, t) = (-2x + y + z, y - z + t, 2x - 2y - t, -y + z - t) \quad b) \text{Ker } \varphi = \text{lin}\{(\frac{1}{2}, 1, 0, -1), (\frac{1}{2}, 0, 1, 1)\}, \text{Im } \varphi =$$

$$\text{lin}\{(1, 1, -2, -1), (0, 1, -1, -1)\}, \text{nie epimorfizm, nie monomorfizm} \quad c) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d) A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad e) \varphi(1, 2, 3, 4) = (3, 3, -6, -3) \quad \mathbf{24.} \quad a) \varphi_A(x, y, z, t) =$$

$$(2x + z + 5t, -4x + 5y - 2t), \varphi_B(x, y, z, t) = (5x + y + 3z - 5t, 3x + 2z, 2x + 2y + z, y + 5z + t) \quad b) \\ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x, y, z) = (3x - 12y + 23z, x + 3y - 7z) \quad \mathbf{25.} \quad a) \text{odwracalne, } M_{\varphi^{-1}} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\frac{x+3y}{7}, \frac{2x-y}{7}\right) \quad b) M_{\varphi+\psi} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, M_{2\varphi} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, M_{\varphi-3\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ c) h(x, y, z) = (7x + 5y + z, 5x + 3y - z, 3x + y - 3z), \varphi(x, y) = (34x - 18y, 49x - 27y) \quad d)$$

$$h(x, y, z) = (5x - 3y + 6z, x + 3y + 3z), h(1, 2, 0) = (-1, 7) \quad e) M_{h^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\varphi(x, y, z) = (4x + 2y + z, 2y + z, 2x - y + 2z)$$