Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 8
WFiIS, informatyka stosowana, I rok
grudzień 2023r.

# Zagadnienie własne operatora liniowego

Notacja:

| | |
|---|---|
| $End(V)$ | algebra endomorfizmów przestrzeni $V$ |
| $Spec(A)$ | widmo (spektrum) macierzy $A$, tj. zbiór wartości własnych |
| $E_\lambda$ | podprzestrzeń własna odpowiadająca wartości własnej $\lambda$ |
| $\chi_A(t) \in K[t]$ | wielomian charakterystyczny macierzy $A \in M_n(K)$ |

**Zadanie 1.** *Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$. Czy podprzestrzenie liniowe $U, W, Z$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są $\varphi$-niezmiennicze?*

*a)* $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$, $U = \text{lin}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$, $W = \text{lin}\{(1,0,-1),(1,2,1)\}$

*b)* $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$, $U = \text{lin}\{(0,1,0)\}$, $W = \text{lin}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

*c)* $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 - 2x_2 - 4x_3, 2x_1 + 7x_2 + 10x_3, x_1 - 2x_2 - 2x_3)$, $U = \text{lin}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $W = \text{lin}\{(1,0,-1),(4,2,-5)\}$, $Z = \text{lin}\{(3,2,1),(1,0,1)\}$

**Zadanie 2.** *Czy $\lambda$ jest wartością własną macierzy $A$?*

*a)* $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, $\lambda = -3$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$

**Zadanie 3.** *Czy $v$ jest wektorem własnym macierzy $A$?*

*a)* $v = (-1, 1)$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ *?* *b)* $v = (1, -2, 2)$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

**Zadanie 4.** *Podaj wartości własne macierzy $A \in M_4(\mathbb{R})$ oraz określ ich krotności algebraiczne.*

*a)* $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

**Zadanie 5.** *Niech $V = \mathbb{R}^2$ lub $V = \mathbb{R}^3$. Jeśli $v \in V$ to wektor własny $\varphi \in End(V)$ odpowiadający wartości własnej $\lambda$, to $\varphi(v)$ może mieć inny zwrot lub długość, ale nie kierunek. Korzystając z tej interpretacji geometrycznej wyznacz wartości własne i wektory własne podanych endomorfizmów.*

*a)* $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi$ *- rzut na oś* $Ox$
*b)* $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi$ *- obrót o kąt* $\frac{\pi}{4}$ *wokół punktu* $O = (0,0)$ *(przeciwnie do ruchu wskazówek zegara)*

*c)* $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi$ *- symetria względem osi* $Oy$
*d)* $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi$ *- jednokładność względem punktu* $O = (0,0)$ *w skali* $k = \frac{1}{3}$
*e)* $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi$ *- obrót o kąt* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *(przeciwnie do ruchu wskazówek zegara)*
*f)* $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi$ *- rzut prostokątny na płaszczyznę* $Oxy$
*g)* $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi$ *- obrót wokół osi* $Oz$ *o kąt* $\frac{\pi}{12}$ *(przeciwnie do ruchu wsk. zegara patrząc z góry)*
*h)* $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi$ *- symetria względem płaszczyzny* $Oxz$
*i)* $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi$ *- symetria względem osi* $Oz$
*j)* $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi$ *- rzut prostokątny na płaszczyznę* $\pi : x + y + z = 0$

**Zadanie 6.** *Wyznacz wielomian charakterystyczny* $\chi_A$ *oraz spektrum* $Spec(A)$ *macierzy rzeczywistej* $A$*. Określ krotności algebraiczne wartości własnych. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy podane macierze są diagonalizowalne? Jeśli tak, wskaż macierz diagonalizującą* $P$ *i dokonaj diagonalizacji.*

*a)* $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *d)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

*e)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *f)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *g)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *h)* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

**Zadanie 7.** *Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu* $\varphi$ *i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy* $\varphi$ *jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz* $D$ *endomorfizmu* $\varphi$ *w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą* $P$.

*a)* $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(x,y) = (x, x+y)$
*b)* $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(x,y) = (-y, x)$
*c)* $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (-y, x, z)$
*d)* $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (x, 2x+2y, -x-y-z)$
*e)* $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (x-z, 2y, x+z)$
*f)* $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (3x-y, 6x-2y, 2x-y+z)$
*g)* $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (-7x+2y+6z, -4x+2y+3z, -8x+2y+7z)$
*h)* $\varphi \in End(\mathbb{R}_2[x])$, $\varphi\big(p(x)\big) = x \cdot p'(x)$
*i)* $\varphi \in End(\mathbb{R}_3[x])$, $\varphi\big(p(x)\big) = p'''(x)$
*j)* $\varphi \in End(\mathbb{R}_2[x])$, $\varphi\big(p(x)\big) = 2xp'(x) + x^2 p(0) + p(2)$
*k)* $\varphi \in End(M_2(\mathbb{R}))$, $\varphi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A$
*l)* $\varphi \in End(M_2(\mathbb{R}))$, $\varphi(A) = A + A^T$

**Zadanie 8.** *Czy wektory własne endomorfizmu* $\varphi \in End(V)$ *stanowią bazę przestrzeni* $V$*? Jeśli tak, zapisz macierz endomorfizmu* $\varphi$ *w tejże bazie.*

*a)* $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (4x+2y, y-x)$
*b)* $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (3x-y, 3y)$
*c)* $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z) = (x-z, x+2y+z, z-x)$
*d)* $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z) = (-x-3y-2z, -x+y+2z, x+3y+2z)$

**Zadanie 9.** *Wyznacz widmo macierzy rzeczywistej $A$. Czy $A$ jest diagonalizowalna?*

*a)* $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 8 & -11 & -8 \\ -10 & 11 & 7 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 8 & -8 & -8 \\ -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

*d)* $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e)* $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

**Zadanie 10.** *Podane macierze mają tylko jedną wartość własną $\lambda = 1$. Nie wyznaczając podprzestrzeni własnych określ krotność geometryczną $\lambda$.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

**Zadanie 11.** *a) Dla jakiej wartości $x \in \mathbb{R}$ macierz $A \in M_4(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & x & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*b) Dana jest macierz $A$ endomrofzimu $\varphi \in End(\mathbb{R}^4)$ w bazach kanonicznych. Dobierz wartość parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, by $\varphi$ miał dwuwymiarową podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda = 5$.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & p & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 12.** *Niech $f \in End(\mathbb{R}^n)$ i niech $A$ to reprezentacja macierzowa $f$ w bazie kanonicznej. Przedyskutuj diagonalizowalność $f$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.*

*a)* $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & -a & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a^2+1 & 0 \end{bmatrix}$

**Zadanie 13.** *W tym zadaniu wykorzystaj diagonalizację endomorfizmu.*

*a) Dany jest $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ taki, że $\varphi(1,2) = (2,4)$, $\varphi(-2,1) = (-2,1)$. Wyznacz $\varphi^{150}(1,0)$.*

*b) Dany jest $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(0,1,1) = (0,1,1)$, $\varphi(2,2,0) = (0,0,0)$, $\varphi(1,0,0) = (-1,0,0)$. Wyznacz wzór na $\varphi(x,y,z)$ i oblicz $\varphi^{105}(2,3,6)$.*

*c) Dany jest $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$, $\varphi(1,1,0) = (-1,-1,0)$, $\varphi(1,1,1) = (0,0,0)$. Oblicz $\varphi^{100}(3,6,9)$.*

*d) Dany jest $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (-7x+2y+6z, -4x+2y+3z, -8x+2y+7z)$. Oblicz $\varphi^{1683}(0,0,-1)$.*

**<u>Zadanie</u> 14.** *Dany jest endomorfizm $\varphi$ przestrzeni $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

*a) Niech $\varphi(f) = 2f' - 4f$. Znajdź wektor własny $f_0$ odpowiadający wartości własnej $\lambda = 2$, taki że $f_0(1) = 1$.*

*b) Niech $\varphi(f) = f''$. Podaj przykład wektora własngo odpowadającego wartościom własnym $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 10$.*

**<u>Zadanie</u> 15.** *Wyznacz wartości własne i wektory własne podanych operatorów.*

*a) operator różniczkowania $\frac{d}{dx}$ na $\mathbb{R}_n[x]$,*
*b) operator transponowania $T \in End(M_n(\mathbb{R}))$, $T(A) = A^T$.*

**<u>Zadanie</u> 16.** *a) Dana jest podprzestrzeń $W = \lim\{e^{ax};\ a \in \mathbb{R}\}$ przestrzeni liniowej $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Wyznacz widmo operatora różniczkowania $\frac{d}{dx} \in End(W)$.*

*b) Podaj przykład macierzy, która jest diagonalizowalna, ale nie jest odwracalna.*

*c) Uzasadnij, że każda macierz $A \in M_2(\mathbb{R})$ taka, że $\det(A) < 0$, jest diagonalizowalna.*

# Odpowiedzi

**1.** *a) tylko W* *b) tylko W* *c) tylko W* **2.** *a) tak* *b) nie* **3.** *a) tak, $\lambda = 3$* *b) nie* **4.** *a) $\lambda_1 = 5$, $k_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $k_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $k_3 = 1$* *b) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -1$ wszystkie krotności 1* **5.** *a) $\lambda_1 = 1$, $v = (x,0)$ dla $x \neq 0$; $\lambda_2 = 0$, $v = (0,y)$ dla $y \neq 0$* *b) brak wartości własnych* *c) $\lambda_1 = -1$, $v = (x,0)$ dla $x \neq 0$; $\lambda_2 = 1$, $v = (0,y)$ dla $y \neq 0$* *d) $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $v \neq 0$ dowolny* *e) gdy $\alpha = 0$, to $\lambda = 1$, $v \neq 0$ dowolny; gdy $\alpha = \pi$, to $\lambda = -1$, $v \neq 0$ dowolny; gdy $\alpha \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ brak wartości własnych* *f) $\lambda_1 = 1$, $v = (x,y,0) \neq 0$; $\lambda_2 = 0$, $v = (0,0,z) \neq 0$* *g) $\lambda_1 = 1$, $v = (0,0,z)$ dla $z \neq 0$* *h) $\lambda_1 = 1$, $v = (0,0,z)$ dla $z \neq 0$; $\lambda_2 = -1$, $v = (x,y,0) \neq 0$* *i) $\lambda_1 = 1$, $v = (0,0,z)$ dla $z \neq 0$; $\lambda_2 = -1$, $v = (x,y,0) \neq 0$* *j) $\lambda_1 = 0$, $v = (x,x,x)$ dla $x \neq 0$; $\lambda_2 = 1$, $v = (x,y,-x-y-D) \neq 0$* **6.** *a) $\chi_A(t) = t^2 - 3t + 5$, brak wartości własnych, A - nie jest diagonalizowalna* *b) $\chi_A(t) = t^2 - 1$, $Spec(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1\}$, widmo proste tzn. $k_1 = k_2 = 1$, $E_1 = \operatorname{lin}\{(1,-1)\}$, $\dim E_1 = 1$, $E_{-1} = \operatorname{lin}\{(1,-3)\}$, $\dim E_{-1} = 1$, diagonalizowalna, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$* *c) $\chi_A(t) = -t^3 + 6t^2 - 8t$, $Spec(A) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4\}$ widmo proste, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1,-1,-1)\}$, $\dim E_0 = 1$, $E_2 = \operatorname{lin}\{(-1,1,1)\}$, $\dim E_2 = 1$, $E_4 = \operatorname{lin}\{(-1,1,-1)\}$, $\dim E_4 = 1$, diagonalizowalna, $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$* *d) $\chi_A(t) = (4-t)(t^2+1)$, $Spec(A) = \{\lambda_1 = 4\}$, $k_1 = 1$, $E_4 = \operatorname{lin}\{(0,1,0)\}$, $\dim E_4 = 1$, nie jest diagonalizowalna* *e) $\chi_A(t) = (2-t)^3$, $Spec(A) = \{\lambda_1 = 2\}$, $k_1 = 3$, $E_2 = \operatorname{lin}\{(1,2,0),(0,0,1)\}$, $\dim E_2 = 2$, nie jest diagonalizowalna* *f) $\chi_A(t) = t^3(t-7)$, $Spec(A) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7\}$, $k_1 = 3, k_2 = 1$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$, $\dim E_0 = 3$, $E_7 = \operatorname{lin}\{(2,0,3,2)\}$, $\dim E_7 = 1$,* *diagonalizowalna,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ *g) diagonalizowalna,* $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ *h) diagonalizowalna,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

**7.** *a)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1\}$, $k_1 = 2$, $E_1 = \text{lin}\{(0,1)\}$, $\dim E_1 = 1$, $\varphi$ *- nie jest diagonalizowalny* *b) brak wartości własnych,* $\varphi$ *- nie jest diagonalizowalny* *c)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1\}$, $k_1 = 1$, $\varphi$ *- nie jest diagonalizowalny* *d)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2\}$, *widmo proste,* $E_{-1} = \text{lin}\{(0,0,1)\}$, $\dim E_{-1} = 1$, $E_1 = \text{lin}\{(1,-2,\frac{1}{2})\}$, $\dim E_1 = 1$, $E_2 = \text{lin}\{(0,-3,1)\}$, $\dim E_2 = 1$, $\varphi$ *- diagonalizowalny, baza wektorów własnych* $\{(0,0,1),(1,-2,\frac{1}{2}),(0,-3,1)\}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ *e)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 2\}$, $k_1 = 1$, $E_2 = \text{lin}\{(0,1,0)\}$, $\dim E_2 = 1$, $\varphi$ *- nie jest diagonizowalny* *f)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1\}$, $k_1 = 1, k_2 = 2$, $E_0 = \text{lin}\{(1,3,1)\}$, $\dim E_0 = 1$, $E_1 = \text{lin}\{(1,2,0),(0,0,1)\}$, $\dim E_1 = 2$, $\varphi$ *- diagonalizowalny* *g)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1\}$, $k_1 = 1, k_2 = 2$, $E_0 = \text{lin}\{(2,1,2)\}$, $\dim E_0 = 1$, $E_1 = \text{lin}\{(1,4,0),(0,-3,1)\}$, $\dim E_1 = 2$, $\varphi$ *- diagonalizowalny* *)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2\}$, *widmo proste,* $E_0 = \text{lin}\{1\}$ *wielomiany stałe,* $\dim E_0 = 1$, $E_1 = \text{lin}\{x\}$, $\dim E_1 = 1$, $E_2 = \text{lin}\{x^2\}$, $\dim E_2 = 1$, $\varphi$ *- diagonalizowalny, a w zasadzie* $P = I$, $D = M_\varphi$, *gdzie* $M_\varphi$ *to macierz w bazie standardowej* *i)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0\}$, $k_1 = 4$, $E_0 = \text{lin}\{1, x, x^2\}$, $\dim E_0 = 3$, $\varphi$ *- nie jest diagonalizowalny* *j)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5\}$, *widmo proste,* $E_0 = \text{lin}\{x^2-4\}$, $\dim E_0 = 1$, $E_2 = \text{lin}\{x^2-3x-2\}$, $\dim E_2 = 1$, $E_5 = \text{lin}\{x^2+1\}$, $\dim E_5 = 1$, $\varphi$ *- diagonalizowalny, baza wektorów własnych* $\{b_1 = x^2-4, b_2 = x^3-3x-2, b_3 = x^2+1\}$, $P = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *k)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1\}$, $k_1 = k_2 = 2$, $E_{-1} = \text{lin}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\}$, $\dim E_{-1} = 2$, $E_1 = \text{lin}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$, $\dim E_1 = 2$, $\varphi$ *- diagonalizowalny,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *l)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1\}$, $k_1 = 1, k_2 = 3$, $E_0 = \text{lin}\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\}$, $\dim E_0 = 1$, $E_2 = \text{lin}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$, $\dim E_2 = 3$, $\varphi$ *- diagonalizowalny,* $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**8.** *a) tak,* $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *b) nie* *c) tak,* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *d) tak,*

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** *a)* $Spec(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3\}$, $\dim E_1 = 1, \dim E_{-3} = 1$, *A nie jest diagonalizowalna* *b)* $Spec(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3\}$, $\dim E_1 = 1, \dim E_{-3} = 2$, *A diagonalizowalna* *c)* $Spec(A) = \{\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 5\}$, $\dim E_7 = 2, \dim E_5 = 1$, *A nie jest diagonalizowalna* *d)* $Spec(A) = \{\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 2\}$, $\dim E_4 = \dim E_2 = 1, \dim E_6 = 2$, *A diagonalizowalna* *e)* $Spec(A) = \{\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3\}$, $\dim E_5 = \dim E_{-3} = 2$, *A diagonalizowalna* **10.** *Dla macierzy* $A, B, C, D$ *odpowiednio* $3, 1, 1, 2$. **11.** *a)* $x = 0$ *b)* $p = 6$ **12.** *a) dlagonalizaowalna dla* $a \in \mathbb{R}$ *b) diagonalizowalna dla* $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ **13.** *a)* $\varphi^{150}(1, 0) = (\frac{2^{150}+4}{5}, \frac{2^{151}-1}{5})$ *b)* $\varphi(x, y, z) = (-x + y - z, z, z)$, $\varphi^{105}(2, 3, 6) = (-5, 6, 6)$ *c)* $\varphi^{100}(3, 6, 9) = (-6, -3, 0)$ **14.** *a)* $f_0(x) = e^{3x-3}$ *b)* $f_1(x) = x + 5$, $f_2(x) = -9\sin 3x$, $f_3(x) = e^{\sqrt{10}x}$ **15.** *a)* $\lambda = 0$, $E_0$ *- niezerowe wielomiany stałe* *b)* $\lambda_1 = 1$, $E_1$ *- niezerowe macierze symetryczne,* $\lambda_2 = -1$, $E_{-1}$ *- niezerowe macierze antysymetryczne,* **16.** *a)* $Spec(\frac{d}{dx}) = \mathbb{R}$ *b)* $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$