Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 9
WFiIS, informatyka stosowana, I rok
styczeń 2024r.

Przestrzenie euklidesowe

1 Iloczyn skalarny i norma

Zadanie 1. *Czy* $g : V \times V \to \mathbb{R}$ *jest iloczynem skalarnym w przestrzeni liniowej* $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$*?*

a) $V = \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 5x_2y_1 + 7x_2y_2$
b) $V = \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = 3x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + 7x_2y_2$
c) $V = \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$
d) $V = \mathbb{R}^n$, $g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$, *gdzie* $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$
e) $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $g(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} f_1(x)f_2(x)dx$
f) $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $g(f_1, f_2) = \int_0^{\pi} f_1(x)f_2(x)dx$
g) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $g(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$
h) $V = \mathbb{R}_1[x]$, $g(p, q) = p(1)q(1) + 2p(2)q(2)$
i) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $g(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$
j)* $V = \mathbb{R}_n[x]$, $g(p, q) = \sum_{i=0}^n p(x_i)q(x_i)$, *gdzie* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$
k) $V = M_n(\mathbb{R})$, $g(A, B) = \mathrm{tr}(A \cdot B^T)$
l) $V = \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = [x_1\, x_2\, x_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$
m) $V = \mathbb{R}[x]$, $g(p, g) = \deg(p \cdot q)$
n) $V = \mathbb{R}[x]$, $g(p, q) = (p \cdot q)(\alpha)$, *gdzie* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ustalone*
o) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $g(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$
p) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $g(p, q) = \int_0^{\infty} e^{-x}p(x)q(x)dx$
q) $V = \mathcal{C}([-2, 2], \mathbb{R})$, $g(f_1, f_2) = \int_{-1}^1 (x + 1)f_1(2x)f_2(2x)dx$
r) $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, $g(f_1, f_2) = \int_{-1}^1 f_1(x)f_2(\frac{x}{2})dx$

WSKAZÓWKA do j): Wykorzystaj wyznacznik Vandermonde'a.

Zadanie 2. *Oblicz iloczyn skalarny wektorów* $u, v \in V$ *w danej przestrzeni euklidesowej.*

a) $V = \mathbb{R}^2$ *ze standardowym iloczynem skalarnym,* $u = (2, 3), v = (-1, 5)$
b) $V = \mathbb{R}^4$ *ze standardowym iloczynem skalarnym,* $u = (1, 0, 1, 1), v = (-1, 2, 0, 1)$
c) $V = \mathbb{R}_2[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$,
$u = 2x^2 + 3x - 1, v = -7x + 5$
d) $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $u = e^{3x}, v = e^{-2x} + 5$
e) $V = M_2(\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A \cdot B^T)$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 3. *Niech* $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$*, przy czym* $\forall x \in [a, b]\ h(x) \geq 0$*. Uzasadnij, że funkcja*

$\Phi : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$\Phi(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)h(x)dx,$$

jest iloczynem skalarnym w $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Zadanie 4. *Sprawdź, że poniższe odwzorowania to normy w podanej przestrzeni* $\mathbb{R}$*-liniowej.*

a) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = |x|$ *b)* $||.||_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $||x||_t = \sum_{i=1}^n |x_i|$

c) $||.||_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $||x||_m = \max_{1\le i\le n} |x_i|$ *d)* $||.||_e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $||x||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$

e) Niech $l^\infty := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \in \mathbb{R} \wedge \sup|a_n| < \infty\}$ *przestrzeń ciągów ograniczonych oraz* $||.|| : l^\infty \to \mathbb{R}$, $||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup|a_n|$

f) Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ *zbiór otwarty,* $k \in \mathbb{N}$ *oraz* $||.|| : \mathcal{C}^k(X) \to \mathbb{R}$, $||f|| = \sup_{x\in X}|f(x)|$

g) Niech $c := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \in \mathbb{R} \wedge \exists \lim_{n\to\infty} a_n < \infty\}$ *to przestrzeń ciągów zbieżnych oraz* $||.|| : c \to \mathbb{R}$, $||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup|a_n|$

h) Niech $c_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \in \mathbb{R} \wedge \exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ *to przestrzeń ciągów zbieżnych oraz* $||.|| : c_0 \to \mathbb{R}$, $||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup|a_n|$

Zauważ, że zachodzą inkluzje $c_0 \subset c \subset l^\infty$.

Zadanie 5. *Niech* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową. Oblicz normy podanych wektorów.*

a) $V = \mathbb{R}^4$ *ze standardowym iloczynem skalarnym;* $v = (2,7,-1,0)$
b) $V = \mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ *ze standardowym iloczynem skalarnym;* $f = 5$, $g = x+5$, $h = 2\sin x = \cos x$
c) $V = \mathbb{R}_1[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0)$; $f = 3-7x$, $g = x+1$
d) $V = M_2(\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A\cdot B^T)$; $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 6. *Niech* V *będzie przestrzenią euklidesową oraz niech* $u,v \in V$ *będą takie, że* $||u|| = 3, ||u+v|| = 4, ||u-v|| = 6$. *Oblicz* $||v||$.

Zadanie 7. *Oblicz miary kątów pomiędzy parami wektorów w danych przestrzeniach euklidesowych.*

a) $V = \mathbb{R}^4$ *ze standardowym iloczynem skalarnym;* $u = (3,2,-1,0), v = (7,0,1,-1)$

b) $V = \mathbb{R}_1[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$; $u(x) = 2, v(x) = 5-x$

c) $V = \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$; $u(x) = \sin x, v(x) = \cos x$

Zadanie 8. *Rozważmy* $V = \mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. *Podaj przykład wielomianu możliwie najniższego stopnia, tworzącego z funkcją* $f(x) = \sin x$ *kąt* $\arccos\frac{\sqrt{6}}{2\pi}$.

2 Dopełnienie ortogonalne, baza ortogonalna

UWAGA: Jeśli nie podano inaczej, w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny.

<u>Zadanie</u> 9. *Czy podane układy wektorów są ortogonalne w przestrzeni euklidesowej V.*

a) $V = \mathbb{R}^3$, $u = (2, 0, 1), v = (3, 1, -1)$

b) $V = \mathbb{R}^4$, $u = (2, -3, 1, -1), v = (6, 1, -2, 7)$

c) $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$, $u(x) = \sin x, v = \cos x$

d) $V = M_2(\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

e) $V = \mathbb{R}^3$ *ze iloczynem skalarnym* $\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$, $u = (1, 1, 0), v = (1, -1, -1)$

<u>Zadanie</u> 10. *a) Niech $u = (1, 2, 0, 3), v = (2, 3, -1, 0)$. Dobierz parametry $a, b \in \mathbb{R}$ w taki sposób, aby wektor $z = (0, 0, 1, 1,) + au + b$ ortogonalny do u i do v.*
b) Wyznacz wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^4$ ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$ i takie że $||v|| = 2$.
c) Niech $u = (1, 1, -1, 0)$. Znajdź przykład wersora $v \in \mathbb{R}^4$ takiego, że $\measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{4}$.

<u>Zadanie</u> 11. *Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.*

a) Oblicz $\langle x^2, -1\rangle$, $||x + 1||$ oraz $\cos\measuredangle(x + 1, x - 1)$.

b) Znajdź niezerowy wielomian możliwie najniższego stopnia należący do $\Big(\mathrm{lin}\{x - 1, x^2\}\Big)^{\perp}$.

c) Dobierz $a \in \mathbb{R}$ tak, by wielomiany $p(x) = 3x^2 + ax - 1$, $q(x) = 2x^2 + 6x - 1$ były ortogonalne.

<u>Zadanie</u> 12. *Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}$-liniową V (ze standardowym iloczynem skalarnym, jeśli nie podano inaczej) i jej podprzestrzeń liniową $U \subset V$. Sprawdź, że $w \in U^{\perp}$.*

a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(3x - y, x + 2y + z, 2x - z, x + 4z),\ x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$, $w = (2, 1, -3, -1)$

b) $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, $U = \mathrm{lin}\{1, x^2, \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \sin^2 x\}$, $w = \sin x$

c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) :\ 2x = 3y = 5z\}$, $w = (4, -6, 0)$

d) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x, y, z, t) :\ x + y = 0,\ z + t = 0\}$, $w = (0, 0, 1, -1)$

e) $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $U = \mathrm{lin}\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$, $w = 2\sin x - 3\cos x$

f) $V = \mathbb{R}_2[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, $U = \mathbb{R}_1[x]$, $w = 6x^2 - 6x + 1$

<u>Zadanie</u> 13. *a) Dana jest podprzestrzeń $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznacz bazę przestrzeni $W^{\perp}$.*

b) Dana jest podprzestrzeń $W = \mathrm{lin}\{w_1 = (3,2,0,1,-4), w_2 = (1,2,-2,0,1), w_3 = (3,-2,6,-2,5)\}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^5$. *Wyznacz bazę przestrzeni* $W^{\perp}$.

Zadanie 14. *Rozważmy przestrzeń liniową* $\mathbb{R}_n[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$, *gdzie* $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$. *Wyznacz dopełnienia ortogonalne podprzestrzeni* U *i* W.

$$U = \{f \in \mathbb{R}_n[x] :\ f(1) = 0\} \quad W = \{f \in \mathbb{R}_n[x] :\ \deg(f) - \textit{parzysty}\}$$

Zadanie 15. *Uzasadnij, że* $\mathcal{B}$ *jest bazą ortogonalną przestrzeni* V *i wyznacz współrzędne wektora* $v \in V$ *w tejże bazie.*

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,-2), b_2 = (12,6)\big)$, $v = (1,3)$

b) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), b_2 = (\frac{12}{13}, \frac{-5}{13})\big)$, $v = (13,26)$

c) $V = \mathbb{R}_3[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = aa_1 + (b-c)(b_1-c_1) + (2c-b)(2c_1-b_1) + dd_1$, *gdzie* $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $q(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$,
$\mathcal{B} = \big(b_1(x) = 2, b_2(x) = x + x^2, b_3(x) = x + 2x^2, b_4(x) = 3x^3\big)$, $v(x) = x^2 - x + 1$

d) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (2,1,1,0), b_2 = (0,1,-1,3), b_3 = (2,-5,1,2), b_4 = (-11,2,20,6)\big)$, $v = (1,0,0,-1)$

Zadanie 16. *Rozważmy przestrzeń* $\mathbb{R}_n[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = a_0 b + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$, *dla* $p = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$, $q = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$.

a) Uzasadnij, że baza standardowa $\mathcal{B} = \big(b_1 = 1, b_2 = x, \ldots, b_n = x^n\big)$ *jest ortonormalna.*
b) Oblicz iloczyn skalarny wektorów $p = x^2 + x - 1, q = 3x + 1$ *w przestrzeni* $R_2[x]$.

Zadanie 17. *Korzystając z macierzy przejścia* $P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ *od bazy kanonicznej* $\mathcal{C}$ *do bazy ortonormalnej* $\mathcal{B}$ *przestrzeni* V, *oblicz współrzędne podanych wektorów w bazie* $\mathcal{B}$.

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), b_2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})\big)$, $v = (1,4)$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(2,3,1), b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-4,1,5)\big)$, $v = (1,1,1)$

Zadanie 18. ***Metodą Grama-Schmidta*** *dokonaj ortogonalizacji baz podanych przestrzeni euklidesowych* V, *a następnie wskaż bazy ortonormalne.*

a) $V = \mathbb{R}^3$, *baza* $\{u_1 = (1,-2,0), u_2 = (5,5,1), u_3 = (5,4,4)\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$, *baza* $\{u_1 = (1,2,1), u_2 = (-3,-4,-1), u_3 = (-4,-7,0)\}$

c) $V = \mathrm{lin}\{u_1 = (1,2,-2,1), u_2 = (1,1,0,2), u_3 = (1,8,1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$

d) $V = \mathbb{R}_2[x]$, *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$, *baza* $\{p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2\}$

e) $V = \mathrm{lin}\{u_1 = (1,8,4), u_2 = (2,6,3)\} \subset \mathbb{R}^2$

f) $V = \operatorname{lin}\{f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2\} \subset \mathcal{C}([1,1],\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

g) $V = \mathbb{R}^2$, *baza* $\{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\}$ *z iloczynem skalarnym* $\langle x, y\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

h) $V = \operatorname{lin}\{f_1 = 1, f_2 = x+1, f_3 = |x|, f_4 = \sin x\} \subset \mathcal{C}([1,1],\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

i) $V = \mathbb{R}_2[x]$, *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$, *baza* $\{p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2\}$

Zadanie 19. *Podane układy wektorów uzupełnij do bazy ortogonalnej przestrzeni* V.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,4,-1), v_2 = (2,-1,-1)$

b) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1,1,1,0), v_2 = (0,1,-1,1)$

c) $V = \mathbb{R}_2[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = \langle ax^2 + bx + c, a_1x^2 + b_1x + c_1\rangle = aa_1 + bb_1 + cc_1$, $v_1 = 2x + 1$

d) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = y + z = t\} \subset \mathbb{R}^4$, $v_1 = (3,2,3,5)$

Zadanie 20. *Wyznacz bazę ortnornormalną* $\mathcal{B}'$ *przestrzeni euklidesowej* V *i podaj współrzędne wektora* $v \in V$ *w tejże bazie.*

a) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 4x - z = 2y - 3z + 2w = 0\} \subset \mathbb{R}^4$, $v = (1,1,4,5)$

b) $V = \mathbb{R}_2[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, $v = x$

c) $V = M_2(\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^T)$, $v = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

d) $V = \mathbb{R}_2[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$, $v = x^2 + x + 1$

Zadanie 21. ***Metodą macierzową*** *zortogonalizuj podane układy wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni euklidesowej* V.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,4,2), v_2 = (1,5,1)$
b) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (0,1,0,1), v_2 = (-2,3,0,1), v_3 = (1,1,1,5)$
c) $V = \mathbb{R}^4$, $V_1 = (0,1,1,0), v_2 = (-2,0,2,0), v_3 = (3,1,1,1)$

3 Projekcje ortogonalne

UWAGA: Jeśli nie podano inaczej, w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny.

Zadanie 22. *Dana jest podprzestrzeń* $U \subset V$ *przestrzeni euklidesowej* V. *Wyznacz rzut ortogonalny* $\pi_U(v)$ *wektora* $v \in V$ *na podprzestrzeń* U.

a) $V = \mathbb{R}^2$, U *to oś* Oy; $v = (7,4)$

b) $V=\mathbb{R}^2$, U to prosta $x=\frac{1}{3}y$, $v=(-3,5)$

c) $V=\mathbb{R}^3$, U to prosta $l:\ \frac{x}{2}=-y=z$; $v=(-4,5,6)$

d) $V=\mathbb{R}^3$, U to prosta $l:\ x=2y=4z$; $v=(3,-2,1)$

e) $V=\mathbb{R}^4$, $U=\operatorname{lin}\{u_1=(1,1,-1,0), u_2=(0,2,-1,1), u_3=(3,5,-4,1)\}$; $v=(3,2,7,0)$

f) $V=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $U=\operatorname{lin}\{u_1=x+1, u_2=x-1\}$; $v=x^2$

g) $V=\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, $U=\operatorname{lin}\{u_1=1, u_2=\cos x\}$; $v=x$

h) $V=\mathbb{R}^4$, $U=\operatorname{lin}\{u_1=(1,1,1,1), u_2=(1,2,2,-1), u_3=(1,0,0,3)\}$, $v=(4,-1,3,4)$

i) $V=\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym $\langle x,y\rangle=2x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_1y_3-x_3y_1$,
$U=\operatorname{lin}\{u_1=(0,1,1), u_2=(0,0,1)\}$, $v=(1,1,1)$

j) $V=\mathbb{R}^3$, $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 2x-y+3z=0\}$, $v=(1,1,1)$

Zadanie 23. *Wyznacz rzut ortogonalny $\pi_U(v)$ wektora $v\in V$ na podprzestrzeń U, dla której wskazano bazę ortogonalną $\mathcal{B}$.*

a) $V=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}=\big(b_1=(5,-1,3), b_2=(1,2,-1)\big)$; $v=(1,1,1)$

b) $V=\mathbb{R}^5$, $\mathcal{B}=\big(e_1=(1,0,0,0,0), e_3=(0,0,1,0,0), e_5=(0,0,0,0,1)\big)$; $v=(1,2,3,4,5)$

c) $V=\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}=\big(b_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2,0), b_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(2,2,-1,1)\big)$; $v=(1,0,0,0)$

d) $V=\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, $\mathcal{B}=\big(u_1=\sin x+\cos x, u_2=\sin x-\cos x\big)$; $v=x$

e) $V=\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p,q\rangle=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)$,
$\mathcal{B}=\big(b_1=x-1, b_2=3x^2-6x+1\big)$; $v=1$

f) $V=\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, $\mathcal{B}=\big(b_1=\sin x, b_2=\sin 2x,\ldots,b_n=\sin nx\big)$; $v=x$

Zadanie 24. *Dana jest podprzestrzeń liniowa U przestrzeni $\mathbb{R}^5$.*

$$U=\{(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^5:\ x+y+2z=0\ \wedge\ x+z+t+2u=0\}$$

a) *Wyznacz bazę U.*
b) *Metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji tejże bazy.*
c) *Podaj bazę ortonormalną.*
d) *Wyznacz współrzędne wektora $p=(1,7,-4,1,1)$ w znalezionej bazie ortogonalnej.*
e) *Wyznacz rzut ortogonalny wektora $v=(1,0,2,1,1)$ na podprzestrzeń U.*

Zadanie 25. *Wyznacz postać odwzorowania $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ będącego projekcją ortogonalną na płaszczyznę $U=\{(x,y,z):\ x+y+z=0\}$.*

Odpowiedzi

1. *a), b), f), i), l), m), n), r) nie* *c), d) e), g), h), j), k), o), p), q) tak* **2.** *a)* 13 *b)* 0 *c)* -37 *d)* $e-1+\frac{5}{3}(e^3-1)$ *e)* 3 **5.** *a)* $\sqrt{54}$ *b)* $3\sqrt{\pi}$ *c)* 1 *d)* $\sqrt{3}$ **6.** $||v|| = \sqrt{17}$ **7.** *a)* $\arccos \frac{20}{\sqrt{714}}$ *b)* $\arccos \frac{3}{\sqrt{82}}$ *c)* $\arccos(-\frac{1}{4})$ **8.** $1 - \frac{1}{2\pi}x$ **9.** *b), c), d), e) są ortogonalne* **10.** *a)* $a = -\frac{25}{66}, b = \frac{19}{66}$ *b)* $v = (v_1, v_2, -v_1, v_4)$ *takie, że* $2v_1^2 + v_2^2 + v_4^2 = 4$, *np.* $v = (1, 1, -1, 1)$ *c)* $v = \frac{1}{8}(\sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{56})$ **11.** *a)* $\langle x^2, -1\rangle = -\frac{1}{3}$, $||x+1|| = \sqrt{\frac{7}{3}}$, $\cos \sphericalangle(x+1, x-1) = -\frac{2}{\sqrt{7}}$ *b)* $50x^2 - 52x + 9$ *c)* $a = -\frac{61}{60}$ **13.** *a)* $\{(1,0,0,0), (0,1,-1,1)\}$ *b)* $\{(-1, \frac{3}{2}, 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, 1, 0), (-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, 1)\}$ **14.** $U^\perp = \mathrm{lin}\{1+x+\ldots+x^n\}$ *- wielomiany, których wszystkie współczynniki są takie same,* $W^\perp$ *- wielomiany stopnia nieparzystego* **15.** *a)* $v = (-1, \frac{1}{6})_\mathcal{B}$ *b)* $v = (29, 2)_\mathcal{B}$ *c)* $v = (\frac{1}{2}, -3, 2, 0)_\mathcal{B}$ *d)* $v = (\frac{1}{3}, -\frac{3}{11}, 0, -\frac{1}{33})_\mathcal{B}$ **16.** 1 **17.** *a)* $v = (\frac{9}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})_\mathcal{B}$ *b)* $v = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{42}})_\mathcal{B}$ **18.** *a)* $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), \frac{1}{\sqrt{46}}(6,3,1), \frac{1}{\sqrt{46}}(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)\}$ *b)* $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\}$ *c)* $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-2,1), \sqrt{\frac{2}{7}}(\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}), \frac{14}{\sqrt{8682}}(-\frac{5}{7}, 5, \frac{41}{14}, -\frac{51}{14})\}$ *d)* $\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}x, \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - \frac{2}{3})\}$ *e)* $\{\frac{1}{9}(1,8,4), \frac{1}{9\sqrt{5}}(20,-2,-1)\}$ *f)* $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3})\}$ *g)* $\{(1,0), \sqrt{\frac{3}{2}}(-1, -\frac{1}{2})\}$ *h)* $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{6}(|x| - \frac{1}{2}), \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\sin x - 3(\sin 1 - \cos 1)x)\}$, *gdzie* $\alpha = 1 + \frac{137}{6}\sin 2$ *i)* $\{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$ **19.** *a)* $v_3 = v_1 \times v_2 = (-6,-3,-9)$ *b)* $v_3 = \frac{1}{3}(-1,0,1,1), v_4 = \frac{1}{3}(1,-1,0,1)$ *c)* $v_2 = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}, v_3 = x^2$ *d)* $v_2 = \frac{5}{47}(7,-11,7,-4)$ **20.** *a)* $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{35}}(1,3,4,3)\}$, $v = (-2\sqrt{2}, \frac{26}{\sqrt{35}})_{\mathcal{B}'}$ *b)* $\mathcal{B}' = \{1, \sqrt{3}(2x-1), 6\sqrt{5}(x^2-x+\frac{1}{6})\}$, $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0)_{\mathcal{B}'}$ *c)* $\mathcal{B}' = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$, $v = (1,5,2,-3)_{\mathcal{B}'}$ *d)* $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(3x^2-6x+1)\}$, $v = (\frac{11}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{6}})_{\mathcal{B}'}$ **21.** *a)* $\{(1,4,2), \frac{1}{21}(-2,13,-25)\}$
b) $\{(0,1,0,1), (-2,1,0,-1), (-1,-1,1,1)\}$
c) $\{(0,1,1,0), (-2,-1,1,0), (1,-1,1,1)\}$ **22.** *a)* $(0,4)$ *b)* $\frac{1}{5}(6,18)$ *c)* $(-\frac{7}{3}, \frac{7}{6}, -\frac{7}{6})$ *d)* $\frac{3}{7}(4,2,1)$ *e)* $\frac{1}{3}(10,9,19,1)$ *f)* $x - \frac{1}{6}$ *g)* π *h)* $\frac{1}{2}(5,3,3,9)$ *i)* $(0,1,0)$ *j)* $\frac{1}{7}(3,9,1)$ **23.** *a)* $(\frac{4}{3}, \frac{7}{15}, \frac{4}{15})$ *b)* $(1,0,3,0,5)$ *c)* $\frac{1}{5}(3,2,1,1)$ *d)* $-2\sin x$ *e)* 0 *f)* $-2\pi\sin x - \pi \sin 2x - \frac{2}{3}\pi \sin 3x - \ldots - \frac{2\pi}{n}\sin nx$ **24.** *a) baza* $\{b_1 = (1,1,-1,0,0), b_2 = (0,2,-1,1,0), b_3 = (0,4,-2,0,1,)\}$ *b) baza ortogonalna* $\mathcal{C} = \{c_1 = (1,1,-1,0,0), c_2 = (-1,1,0,1,0), c_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, -\frac{4}{3}, 1)\}$ *c) baza ortonormalna* $\mathcal{C}' = \{c_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}c_1, c_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}c_2, c_3' = \frac{3}{\sqrt{33}}c_3\}$ *d)* $p = [4, \frac{7}{3}, 1]_\mathcal{C}$ *e)* $\pi_U(v) = \frac{1}{33}(-5,-17,11,12,-9)$ **25.** *odwzorowanie o macierzy* $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$