wewnętrzne $\quad a \circ b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} \in A$

przemienne $\quad a \circ b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} = 2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n = b \circ a$

łączne $\quad (a \circ b) \circ c = 2^{n+m} \cdot 2^k = 2^{n+m+k} = 2^n \cdot 2^{m+k} = a \circ (b \circ c)$

Łatwe własności działań na potęgach

$e \in X$

el. neutralny $\quad e = 2^s, s \in \mathbb{N}_0 \quad a \circ e = a \Leftrightarrow 2^{n+s} = 2^n \Rightarrow s = 0,\ e = 1 \in X$

$e = 2^0$

brak el. odwrotnego $\quad a \circ b = 1 \Leftrightarrow 2^{n+m} = 2^0 \Leftrightarrow m = -n \Rightarrow m = -n \notin \mathbb{N}_0$

el. neutr.

Wniosek: monoid przemienny (tj. półgrupa przemienna z jedynką)

Definicja 1.4.4. Zespół $(A, \circ, *)$ złożony z niepustego zbioru A i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : A \times A \to A$, $* : A \times A \to A$ nazywamy *pierścieniem*, jeśli $(A, \circ)$ jest grupą abelową, zaś działanie $*$ jest łączne oraz rozdzielne względem działania $\circ$, tzn.

$\circ \ *$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$(A, *)$ półgrupa

w 2 strony, bo nie wiem

$$\forall a, b, c \in A \quad (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c) \ \wedge \ c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b).$$

$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

czy $*$ jest przemienne

Pierścień, w którym działanie $*$ posiada element neutralny, nazywamy *pierścieniem z jedynką* lub *z jednością*. Pierścień, w którym działanie $*$ jest przemienne, nazywamy *pierścieniem przemiennym* lub *komutatywnym*.

	Notacja addytywna		Notacja multiplikatywna
$\circ \,/\, +$	dodawanie	$* \,/\, \cdot$	mnożenie
$a + b$	suma	$a \cdot b$	iloczyn
$e = 0$	zero	$e = 1$	jedynka
$a' = -a$	element przeciwny	$a' = a^{-1}$	element odwrotny

$e_\circ \quad 0$

$e_* \quad 1$

$$na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n}, \ n \in \mathbb{N} \qquad a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

$$0 \cdot a = 0 \qquad a^0 = e = e = 1$$

$$m \in \mathbb{Z}, m < 0 \quad ma = \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{m} \qquad a^m = \underbrace{a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}}_{n}$$

Definicja 1.4.5. Zespół $(K, \circ, *)$ złożony ze zbioru K zawierającego co najmniej dwa elementy i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : K \times K \to K$, $* : K \times K \to K$ nazywamy *ciałem*, jeśli

FIELD

- $(K, \circ)$ jest grupą abelową (z elementem neutralnym $e_\circ$),
- $(K \setminus \{e_\circ\}, *)$ jest grupą abelową,
- działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $\circ$.

„niezerowe"

czyli w ciele są co najmniej dwa elementy

Zatem ciało to pierścień przemienny z jedynką (różną od zera, tj. $1 = e_* \neq e_\circ = 0$), w którym wszystkie niezerowe (tj. różne od elementu neutralnego $e_\circ$) elementy są odwracalne. tzn. mają el. symetryczny

Zatem w ciele można zdefiniować operację *dzielenia* w sposób następujący:

$$\frac{a}{b} := a * b^{-1}, \quad a, b \in K,\, b \neq 0.$$

Przykład 1.4.6. i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ciało liczb rzeczywistych
$(\mathbb{R}, +)$ grupa addytywna ciała
$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grupa multiplikatywna ciała

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ciało liczb wymiernych

iii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ pierścień przemienny z jedynką, ale nie ciało (bowiem np. $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$)

iv) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_p, \cdot_p)$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$
$+_p, \cdot_p$ dodawanie i mnożenie modulo p

Jeśli p to liczba pierwsza, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem (tzw. ciało reszt modulo p). Jeśli p nie jest liczbą pierwszą, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest pierścieniem, ale nie ciałem.

$3 \cdot 2 = 6$

$\equiv p \quad 6 \in \bar{1}$

mod p

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ to ciało

el. neutr

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$e_\circ$

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nie jest ciałem

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

brak 1

$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$

Definicja 1.4.7. Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Elementy $a, b \in A, a \neq 0, b \neq 0$ nazywamy *dzielnikami zera*, jeśli $a \cdot b = 0$.

Uwega 1.4.8. W ciele nie ma dzielników zera.

! tak w ten sposób można dowód podając przykład że "coś" nie jest ciałem

Dowód. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem oraz niech $a, b \in K$. Załóżmy, że $a \cdot b = 0$ oraz $a \neq 0$. Jeśli $a \neq 0$, to istnieje $a^{-1} \in K$. Otrzymujemy

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b_{=}(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Zatem $b = 0$. $\square$

$R^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$

Przykład 1.4.9. Sprawdź, że zbiór $\mathbb{R}^2$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia zdefiniowanymi poniżej ma strukturę ciała.

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1)+(x_2, y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2), \ (x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) := (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1).$$

$(\mathbb{C}, +)$ jest grupą abelową.

Działanie $+$ jest wewnętrzne, łączne, przemienne. Elementem neutralnym jest $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, zaś elementem przeciwnym do $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ jest $(-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2$.

$(\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ jest grupą abelową.

Działanie $\cdot$ jest wewnętrzne.

przemienność:

$$(x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1) = \ = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$$

łączność: $\quad L = P$

$$L = (a, b) \cdot [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] = (a, b) \cdot (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) =$$

$$= (ax_1x_2 - ay_1y_2 - bx_1y_2 - bx_2y_1, ax_1y_2 + ax_2y_1 + bx_1x_2 - by_1y_2)$$

$$P = [(a, b) \cdot (x_1, y_1)] \cdot (x_2, y_2) = (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) \cdot (x_2, y_2) =$$

$$= (ax_1x_2 - by_1x_2 - ay_1y_2 - bx_1y_2, ax_1y_1 - by_1y_2 + ay_1x_2 + bx_1x_2)$$

el. neutralny: $\quad e = (1, 0)$

$$\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \quad (1, 0) \cdot (x_1, y_1) = (1 \cdot x_1 - 0 \cdot y_1, 1 \cdot y_1 + 0 \cdot x_1) = (x_1, y_1)$$

el. odwrotny do $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$:

$$(x_1, y_1) \cdot (a, b) = (1, 0) \ \Leftrightarrow \ (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) = (1, 0) \ \Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall (x_1, y_1) \neq (0, 0) \quad a = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \ b = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem $+$, bowiem $L = P$.

$$L = (a, b)\cdot[(x_1, y_1)+(x_2, y_2)] = (a, b)\cdot(x_1+x_2, y_1+y_2) = (ax_1+ax_2-by_1-by_2, ay_1+ay_2+bx_1+bx_2)$$

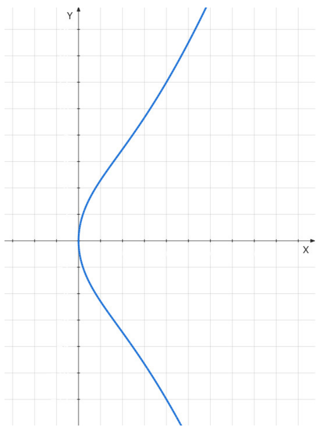
$$P = [(a, b) \cdot (x_1, y_1)] + [(a, b) \cdot (x_2, y_2)] = (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) + (ax_2 - by_2, ay_2 + bx_2)$$

Definicja 1.4.10. Zdefiniowane powyżej ciało nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$. Elementy tego ciała nazywamy *liczbami zespolonymi*.

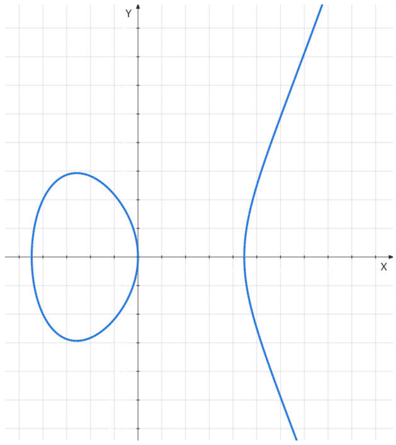
complex numbers

NIEOBOWIĄZKOWE!

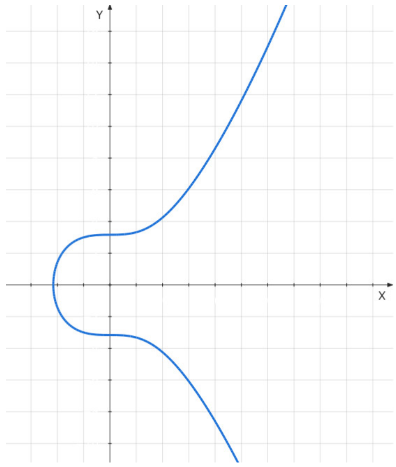
Przykład 1.4.11 (Struktura grupy na krzywej eliptycznej)**.** Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. *Krzywą eliptyczną* nad ciałem K nazywamy krzywą zdefiniowaną równaniem $y^2 = x^3 + ax + b$, gdzie $a, b \in K$ są takie, że $4a^3 + 27b^2 \neq 0$.
Warunek ten zapewnia, iż krzywa nie ma punktów osobliwych.



$y^2 = x^3 + 20x$ nad $\mathbb{R}$



$y^2 = x^3 - 20x$ nad $\mathbb{R}$



$y^2 = x^3 + 10$ nad $\mathbb{R}$

Oznaczmy
$$E(K) = \{(x, y) \in K \times K : y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\mathcal{O}\},$$
gdzie $\mathcal{O}$ jest pewnym wyróżnionym punktem, zwanym *punktem w nieskończoności.*

W zbiorze $E(K)$ można zdefiniować operację grupową + „dodawania" punktów, dla której $\mathcal{O}$ jest elementem neutralnym i taką, że $(E(K), +)$ jest grupą abelową.

Niech $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ to dwa punkty ze zbioru $E(K)$. Zdefinujemy dzialanie $+ : E(K) \times E(K) \to E(K)$ w opisany niżej sposób.

1. $A + \mathcal{O} = A$, $\mathcal{O} + B = B$

2. Jeśli $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = -y_1$, wówczas $A + B = \mathcal{O}$.

3. W pozostałych przypadkach obliczamy $\lambda = \begin{cases} \frac{3x_1^2+a}{2y_1} & ; \quad A = B \\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} & : \quad A \neq B \end{cases}$.

Wówczas $A + B = C = (x_3, y_3)$, gdzie $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ oraz $y_3 = -\lambda x_3 - \nu$, dla $\nu = y_1 - \lambda x_1$.

W przypadku gdy $A \neq B$ oraz $x_1 \neq x_2$ dodawanie punktów można opisać geometrycznie w następujący sposób.

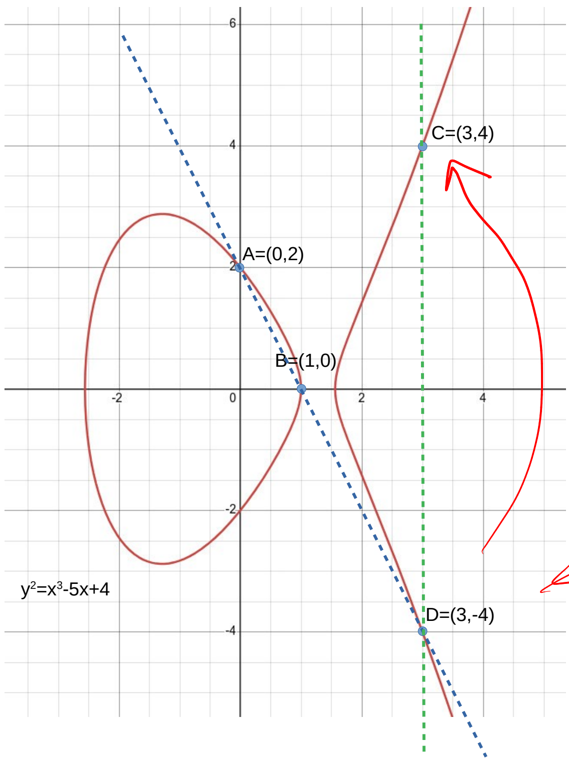
Wyznaczmy prostą l przechodzącą przez punkty A i B. Można wykazać, że wówczas prosta l przecina krzywą w dokładnie trzech punktach A, B oraz $D = (x_4, y_4)$, gdzie $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ oraz $y_3 = \lambda x_3 + \nu$, dla $\nu = y_1 - \lambda x_1$. Inaczej mówiąc $x_4 = x_3$ zaś

$y_4 = -y_3$.

$A + B \overset{\text{zdef}}{=} C$

$A, B \in E(K)$

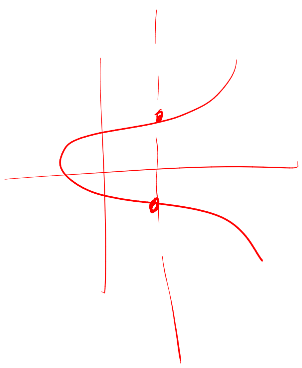
$\underline{E(\mathbb{R})}$

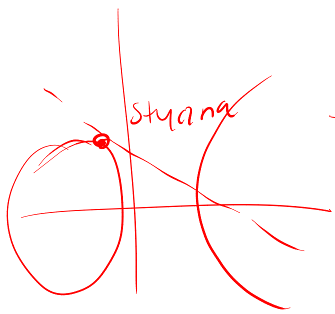


ψ prosta przez A i B

$\psi \cap E(\mathbb{R}) = \{A, B, D\}$

Krzywe eliptyczne znajdują zastosowanie w kryptografii. Więcej informacji można znaleźć tutaj lub tutaj.





$A + A \longrightarrow D$

$D \xrightarrow{\text{odbicie}} C$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 2
Data: ....

TEMAT: *Liczby zespolone*

2.1 Ciało liczb zespolonych

„zanurzenie”

Motywacja $2x+1=0$ $X^2+1=0$

$$\mathbb{N} \xhookrightarrow[n\mapsto n]{} \mathbb{Z} \xhookrightarrow[n\mapsto \frac{n}{1}]{} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \xhookrightarrow[x\mapsto(x,0)]{h} \mathbb{C}$$

$3\cdot x+1=0$ $x^2-3=0$

$X^2-2=0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{Q}$, jego rozwiązania $\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$
Ćwiczenie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}:\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ jest ciałem takim, że $\mathbb{Q}\hookrightarrow\mathbb{Q}(\sqrt{2})\hookrightarrow\mathbb{R}$

$X^2-2=0$

$X^2+1=0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{R}$, jego rozwiązania $\pm i$ nie należą do $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}(i)=\{a+bi:\ a,b\in\mathbb{R}\}=\mathbb{C}$
$\mathbb{C}$ ciało *algebraicznie domknięte* - tzn. rozwiązania równań algebraicznych (wielomianowych) o współczynnikach z $\mathbb{C}$ należą do $\mathbb{C}$

$ax^2+bx+c=0$
$1\cdot x^2+0\cdot x^1+(-2)\cdot x^0=0$
$\{1,0,-2\}\in\mathbb{Q}$

$\mathbb{C}=\{(a,b)\ldots\}=\{a+bi\ldots\}$

$i^2=-1$

$X^2+1=0$

Zanurzenie $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$

Niech $\Omega=\mathbb{R}\times\{0\}=\{(x,0):\ x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$. Wówczas $(\Omega,+,\cdot)$ jest ciałem.

wewnętrzność: $(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)\in\Omega,\ (x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1x_2,0)\in\Omega$

przemienność:
$$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)=(x_2+x_1,0)=(x_2,0)+(x_1,0)$$
$$(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1x_2,0)=(x_2x_1,0)=(x_2,0)\cdot(x_1,0)$$

łączność:
$$[(x_1,0)+(x_2,0)]+(x_3,0)=(x_1+x_2+x_3,0)=(x_1,0)+[(x_2,0)+(x_3,0)]$$
$$[(x_1,0)\cdot(x_2,0)]\cdot x_3,0=(x_1x_2x_3,0)=(x_1,0)\cdot[(x_2,0)\cdot(x_3,0)]$$

el. neutralne: $(0,0)$ dla dodawania oraz $(1,0)$ dla mnożenia
el. symetryczne do $(x_1,0)$: $(-x_1,0)$ względem $+$, $(\frac{1}{x_1},0)$ względem $\cdot$

rozdzielność:
$$[(x_1,0)+(x_2,0)]\cdot(x_3,0)=(x_1+x_2,0)\cdot(x_3,0)=((x_1+x_2)x_3,0)=$$
$$=(x_1x+3+x_2x_3,0)=[(x_1,0)\cdot(x_3,0)]+[(x_2,0)\cdot(x_3,0)]$$

Niech $h:\mathbb{R}\to\Omega$, $h(x)=(x,0)$. Jest to *zanurzenie*, czyli bijekcja taka, że $h(x_1+x_2)=h(x_1)+h(x_2)$ oraz $h(x_1\cdot x_2)=h(x_1)\cdot h(x_2)$.
Utożsamiamy zbiory $\mathbb{R}$ oraz Ω i piszemy x zamiast $h(x)$.

$\mathbb{R}$ x $(x,0)$ h

zanurzenie jest zgodne z działaniami

$h(x_1+x_2)$
$h(x_1)+h(x_1)$

$x_1 x_2$ x_1+x_1 h
x_1, x_1 $+$

$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$

$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1, 0)$

$e_+ = (0,0)$

$e_\cdot = (1,0)$

Zdefiniujmy $i := (0,1)$ tzw. *jednostka urojona*. Wówczas

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$$

$h(-1)$

$$\mathbb{C} \ni z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy$$

$h(x)$ $\quad i$ $\quad h(y)$

$h(x) + i\cdot h(y)$

$x + iy$

Postać $z = x + iy$, gdzie $x, y, \in \mathbb{R}$ to tzw. *postać kanoniczna (algebraiczna, Gaussa)* liczby zespolonej. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Re}z$. Liczbę $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Im}z$. Liczby postaci iy, $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *czysto urojonymi*.

$z \in \mathbb{C}$

$z = x + iy$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_1 \wedge \mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2\right)$$

Postać algebraiczna pozwala na dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jak wielomianów zmiennej i, przy warunku $i^2 = -1$.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

DEFINICJA $\mathbb{C}$

$x_1\cdot x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + \underbrace{i^2}_{-1}y_1y_2$

Przykład 2.1.1. $(2 + 7i) - (4 - 2i) = -2 + 9i$

$$(3 - i)\cdot(2 + 3i) = 6 + 9i - 2i - 3i^2 = 9 + 7i$$

$$\frac{2+3i}{2-5i} = \frac{(2+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{4+10i+6i+15i^2}{4-25i^2} = \frac{-11+16i}{29} = -\frac{11}{29} + \frac{16}{29}i$$

$\in \mathbb{R}$

domnażanie przez czynnik sprzężony

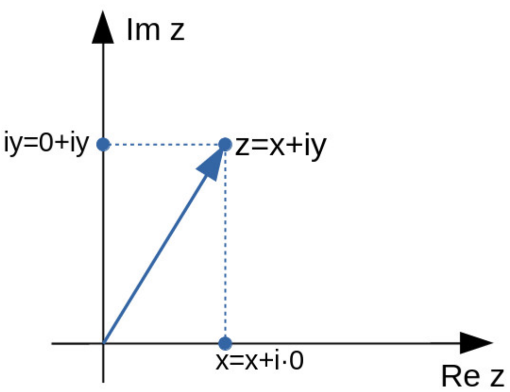
Uwaga 2.1.2. W ciele $\mathbb{C}$ nie można określić porządku liniowego.

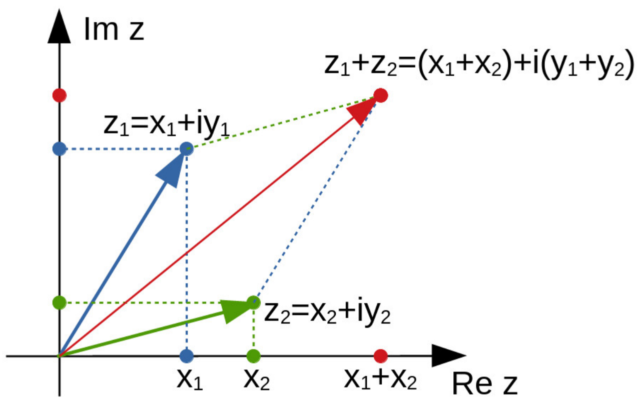
!

$$-1 = i\cdot i = (-i)\cdot(-i) \qquad 1 = 1\cdot 1 = (-1)\cdot(-1)$$

Utożsamiamy liczby zespolone z punktami na płaszczyźnie lub wektorami zaczepionymi w $(0,0)$.

Płaszczyzna zespolona - geometryczny model ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$





$(x+iy)(x-iy) = x^2 \cancel{-ixy} + \cancel{ixy} - i^2y^2$
x^2+y^2

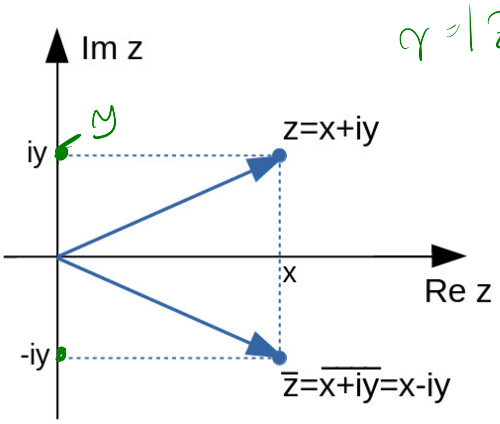
$z = 2-5i$ $\quad x=2,\ y=-5$

$\bar{z} = 2+5i$

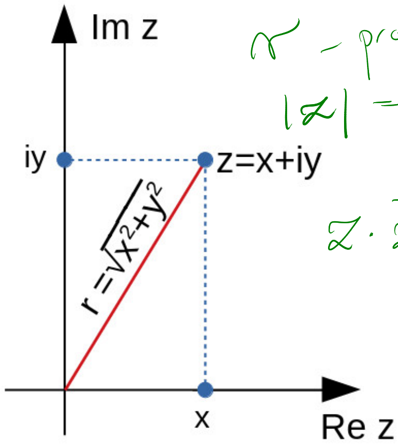
Definicja 2.1.3. Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Liczbę zespoloną $w = x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do liczby z. Oznaczamy ją $\bar{z}$.

i) Liczbę rzeczywistą $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy modułem liczby z. Oznaczamy ją $|z|$.



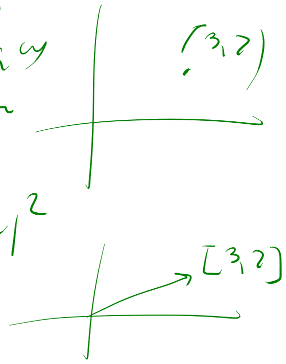
ozn.
$r = |z|$



r – promień wodzący

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$



Twierdzenie 2.1.4 (Własności liczb zespolonych)**.** Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

$z = x + iy$

i) $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}z_1 + \mathrm{Re}z_2$, $\quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}z_1 + \mathrm{Im}z_2$

ii) $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\quad \mathrm{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Real $\quad \mathrm{Re}\, z = x$

Imagin. $\quad \mathrm{Im}\, z = y$

iii) $\overline{(\bar{z})} = z$

iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$, $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, dla $z_2 \neq 0$

vi) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

vii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$

viii) $\mathrm{Re}z \leq |\mathrm{Re}z| \leq |z|$, $\quad \mathrm{Im}z \leq |\mathrm{Im}z| \leq |z|$

ix) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

x) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ $\quad$ (nierówność trójkąta) $\quad \Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|$

Dowód. vii) $(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$
viii) $\mathrm{Re}z = x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
x) $1 = \mathrm{Re}1 = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{z_1+z_2}\right) \overset{\text{i)}}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) \overset{\text{def}}{\leq} \left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1+z_2}\right| \overset{\text{iv)v)}}{=} \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|} \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \ \wedge\ |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| \Rightarrow \Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|$ $\quad \square$

$i^2 = -1$

$z = x + iy$

2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

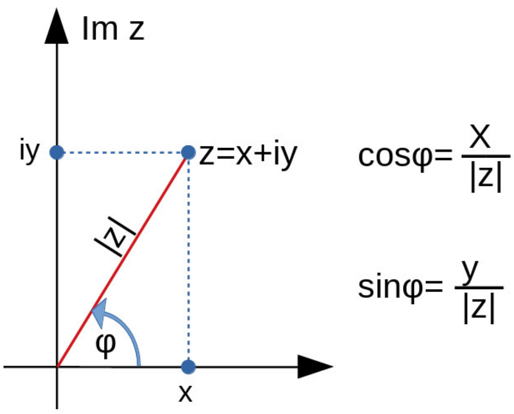
$z \cdot z = z^2$

$z^{100} = ?$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy \neq 0$. Wówczas $z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$. Ponieważ $\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1$, więc istnieje kąt φ taki, że

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$



$z \neq 0$

$|z| \neq 0$

Dowolny taki kąt nazywamy *argumentem* liczby z. Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$, nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $\arg z$. Zatem dowolny argument liczby z ma postać $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Przyjmujemy, że argument liczby $z = 0$ jest nieokreślony. Dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ możemy zatem przedstawić w postaci $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie φ to jeden z jej argumentów. Powyższe przedstawienie nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z.

każdy inny argument

Gdy $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$, to wówczas $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\beta = \alpha + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2.2.1. Przedstaw podane liczby w postaci trygonometrycznej.

$z = x + iy$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z = 7$
$z = 7(1 + 0i)$

$z = -i$
$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$
$z = 1\,(0 + (-1)\cdot i)$
$\begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = -1 \end{cases}$

$z = -\sqrt{27} - 3i$
$|z| = \sqrt{27 + 9} = 6$
$z = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$
$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow \varphi = ?$

$\varphi = 0 + 2k\pi$, $\arg z = 0$

$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\arg z = \frac{3}{2}\pi$

$\varphi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $\arg z = \frac{7}{6}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$z = 7(\cos 0 + i\sin 0)$

$-i = 1(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)$

$-\sqrt{27} - 3i = 6(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$

$-i =$
$= 0 + (-1)\cdot i$

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 2.2.2. Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
$z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$. Wówczas:

i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$,

ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \big(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\big)$,

iii) $z^n = |z|^n \cdot \big(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\big)$ tzw. *wzór de Moivre'a*

$z_1^2 = z_1 \cdot z_1 = |z_1|\cdot|z_1|\big(\cos(2\alpha) + i\sin 2\alpha\big)$
$|z_1|^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$
Łatwe potęgowanie

Dowód. i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$
$= |z_1|\cdot|z_2|\Big(\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\underbrace{(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)}_{\sin(\alpha+\beta)}\Big)$

cos α sin α

BŁĄD!

ii) analogicznie
iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $z^2 = z\cdot z = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.
Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę. □

$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Przykład 2.2.3. Przedstaw liczbę $z = -\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10}$ w postaci trygonometrycznej.

METODA I: Ponieważ $|z| = 1$, zatem $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ dla pewnego $\varphi \in [0, 2\pi)$.

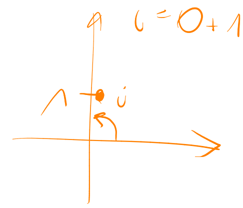
$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\sin\frac{\pi}{10} < 0 \\ \sin\varphi = \cos\frac{\pi}{10} > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi \text{ z II ćwiartki}$$

Na mocy wzorów redukcyjnych $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ oraz $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

-1

$i = 0 + 1\cdot i$



METODA II: $z = -\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10} = i^2\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10} = i\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right) =$
$\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

Przykład 2.2.4. Oblicz $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}) \qquad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2}{\sqrt{2}}\Big(\cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{4}\right)\Big) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{7}{12}\pi\right)\right)$$

$\alpha - \beta$

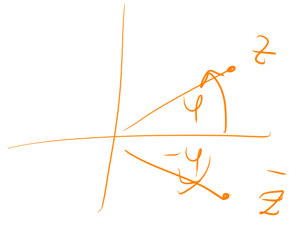
$\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 2^{10}\left(\cos\left(\tfrac{140}{12}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{140}{12}\pi\right)\right) = 2^{10}\left(\cos\left(\tfrac{35}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{35}{3}\pi\right)\right) =$$
$$= 2^{10}\left(\cos\left(12\pi - \tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(12\pi - \tfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{10}\left(\cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$
$$= 2^9(1 - \sqrt{3}i)$$

Twierdzenie 2.2.5 (Własności argumentu). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\quad (k = 0$ lub $k = -1)$

$\arg(z) - \alpha \in [0, 2\pi)$



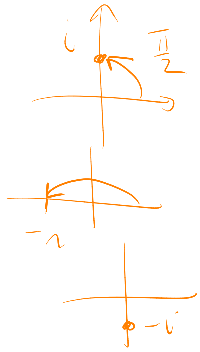
ii) $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $(k = 0$ lub $k = -1)$

iii) $\arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

iv) $\arg\bar{z} = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$

$2\pi - \varphi$

Dowód. iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $\arg(z^2) = \arg(z \cdot z) = \arg z + \arg z + 2k\pi = 2\arg z + 2k\pi$. Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę.
iv) $z \cdot \bar{z} = |z^2|$ oraz $0 = \arg(|z^2|) = \arg z + \arg\bar{z} + 2k\pi$, skąd $\arg\bar{z} = -2\pi - \arg z$ □



Przykład 2.2.6. $\arg i = \frac{\pi}{2}$ $\arg(-1) = \pi$ $\arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$
$i = (-1)\cdot(-i) \Rightarrow \arg i = \pi + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{5}{2}\pi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, tj. $k = -1$

$\arg(z_1 \cdot z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

ozn.

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ definiujemy $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Zatem dowolną liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci $z = |z|e^{i\varphi}$, gdzie φ to pewien argument liczby z.

Przykład 2.2.7. a) $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 \cdot i = i$

b) $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 \cdot i \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$
najpiękniejszy wzór w matematyce

Twierdzenie 2.2.8. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:

i) $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$, $e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$,

ii) $(e^{i\alpha})^k = e^{ik\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$, $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi$

iii) $e^{i(\alpha+2k\pi)} = e^{i\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$, $\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos\beta + i\sin\beta$

iv) $e^{i\alpha} \neq 0$, $|e^{i\alpha}| = 1$.

Dowód. i), ii), iii) Analogiczny jak dla własności działań na liczbach w postaci trygonometrycznej.
iv) Mamy $|e^{i\alpha}| = |\cos\alpha + i\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$, zatem $e^{i\alpha} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sin\alpha = 0$, co nie jest możliwe, gdyż gdy $\cos\alpha = 0$, to $\sin\alpha = \pm 1$. □

Wniosek 2.2.9. Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2e^{i\beta}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Wówczas:

i) $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\alpha+\beta)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\alpha-\beta)}$,

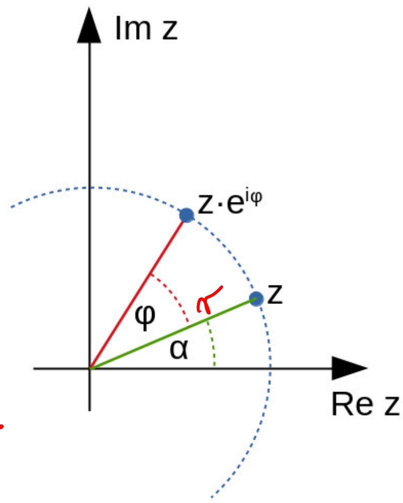
ii) $z^k = r^ke^{ik\varphi}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,   KONIEC

iii) $\bar{z} = re^{-i\varphi}$.

Dowód. iii) Jeśli $\arg z = \varphi$, to $\arg\bar{z} = 2\pi - \varphi$, skąd $e^{(2\pi i - \varphi)i} = e^{2\pi}e^{-\varphi i} = e^{-\varphi i}$. □

Wzory Eulera
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$
Dodając lub odejmując stronami, otrzymujemy :

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$



Obrót o kąt φ
$z = re^{i\alpha}$
$z \cdot e^{i\varphi} = re^{i(\alpha+\varphi)}$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$

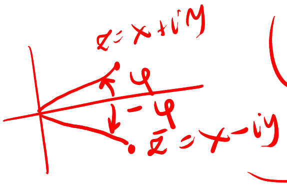
$r \cdot 1 = r$
ten sam okrąg

Przykład 2.2.10. Rozwiąż równanie $z^3 = (\overline{z})^3$.

$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$

1) Widzimy, że $z = 0$ spełnia równanie.
2) Załóżmy teraz, że $z \neq 0$. Wówczas $z = re^{i\varphi}$, dla pewnych $r \in \mathbb{R}, r > 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Zatem

$|z| = r$



$(re^{i\varphi})^3 =$

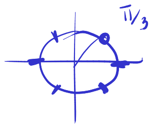
$$\begin{aligned} z^3 &= (\overline{z})^3 \\ r^3 e^{3i\varphi} &= r^3 e^{-3i\varphi} \quad / : r \neq 0 \quad / \cdot e^{3i\varphi} \\ e^{6i\varphi} &= 1 = e^0 = e^{0 \cdot i} \\ 6\varphi &= 0 + \boxed{2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi &= \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

?

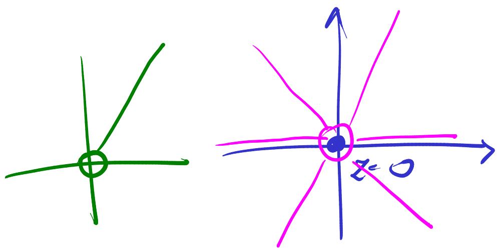
$z \neq 0 \Rightarrow |z| \neq 0$

WYSTARCZY $k = 6$ $\varphi = 2\pi$

Rozwiązaniami są punkt $z = 0$ oraz półproste $\varphi_k = \frac{k\pi}{3}$, $\quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. $k = 0$ $\varphi = 0$



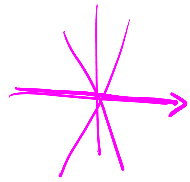
Podsumowując, rozwiązaniami są punkty należące do prostych $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ oraz $y = -\sqrt{3}x$.



2.3 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe

Pierwiastkowanie
Niech $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ będą ustalone.

Definicja 2.3.1. Każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ spełniająca równanie $z^n = w$, nazywamy *pierwiastkiem n-tego stopnia* z liczby w.



Przykład 2.3.2. Rozwiąż równanie $z^2 = 8 + 6i$.

I sposób:
postać wykładnicza

$z=|z|e^{i\varphi}$, $w=8+6i$

$|z|^2e^{2i\varphi}=w$ $=8+6i$

$|w|=10$

$w=8+6i=10(\frac{4}{5}+i\frac{3}{5})$

$\varphi=\arcsin\frac{3}{5}+2k\pi$

$|z|^2e^{2i\varphi}=10\cdot e^{\alpha i}$

$z^2=w$

$|z|=\sqrt{10}$

$\varphi_k=\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}+k\pi$

$2\varphi=\alpha+2k\pi$

$z=\sqrt{10}e^{i\varphi_k},\ k\in\{0,1\}$

II sposób: (1)
postać algebraiczna

$z=x+iy$, $w=8+6i$

$z^2=w$

$(x+iy)^2=8+6i$

$x^2+2xyi-y^2=8+6i$

$$\begin{cases} x^2-y^2=8\\ 2xy=6\end{cases}$$

$y\neq 0$ (gdy $y=0$, to $z=x$, $x^2\neq 8+6i$)

$x=\frac{3}{y}$, $\frac{9}{y^2}-y^2=8$ do pierwszego

$y^4+8y^2-9=0$, $\Delta=100$

$y^2=1$, $y=\pm 1$

$z=3+i\ \vee\ z=-3-i$

III sposób: (2)
postać algebraiczna

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$8+6i=9+6i-1=$
$=3^2+\underbrace{2\cdot 3\cdot i}_{2ab}+i^2=$
$=(3+i)^2$

$z=3+i\ \vee\ z=-3-i$

Twierdzenie 2.3.3. Jeśli $n\in\mathbb{N}$, $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $w=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, to wówczas równanie $z^n=w$ posiada n różnych rozwiązań. Rozwiązania te mają postać

1. $z^n-w=0$

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

tych pierwiastków z liczby w jest n

Dowód. Niech $z=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, wówczas

$$z^n=w \Leftrightarrow \rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases}\rho^n=r\\ n\alpha=\varphi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

znane?

$z=?$ $\rho=?$ $\alpha=?$

Otrzymujemy $z_k=\sqrt[n]{r}(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)$, gdzie $\alpha_k=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$, $k=0,1,\dots,n-1$. □

Symbolem $\sqrt[n]{w}$ oznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań równania. Zatem

zbiór !

$$\sqrt[n]{w}=\{z\in\mathbb{C}: z^n=w\}=\{z_0,z_1,\dots,z_{n-1}\}.$$

$\mathbb{R}$: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{1}\cdot x+5=0$

Przykład 2.3.4. Rozwiąż równanie $z^5=\sqrt{8}-i\sqrt{24}.$ $=w$

Niech $z=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ oraz $w=\sqrt{8}-i\sqrt{24}$.

$z=?$ $\rho=?$ $\alpha=?$

Obliczamy $|w|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, skąd $w=4\sqrt{2}(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Zatem

$\cos\varphi$ $\sin\varphi$

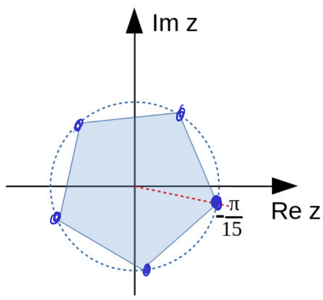
$$z^5=w \Leftrightarrow \rho^5(\cos 5\alpha+i\sin 5\alpha)=4\sqrt{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{3})+i\sin(-\tfrac{\pi}{3})) \Leftrightarrow \begin{cases}\rho^5=4\sqrt{2}=(\sqrt{2})^5\\ 5\alpha=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\{0,1,2,3,4\}\end{cases}.$$

Stąd $\rho=\sqrt{2}$, $\alpha_k=-\frac{\pi}{15}+\frac{2}{5}k\pi$ oraz $z_k=\sqrt{2}(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)$, gdzie $k\in\{0,1,2,3,4\}$.

$k=5$ $-\frac{\pi}{15}+2\pi$ $-\frac{\pi}{15}$ $k=0$ 5 rozwiązań

Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Liczby $z_0,z_1,\dots,z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n=w$ stanowią wierzchołki n-kąta foremnego, wpisanego w koło o środku $z=0$ i promieniu $\sqrt[n]{r}$.



Przykład 2.3.5. Rozwiąż równanie $z^4 = (\sqrt{3}-i)^{12}$.

w $\quad \sqrt[4]{w}$ zbiór 4-elementowy

Równanie ma 4 rozwiązania z_0, z_1, z_2, z_3. Będą one wierzchołkami kwadratu.

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

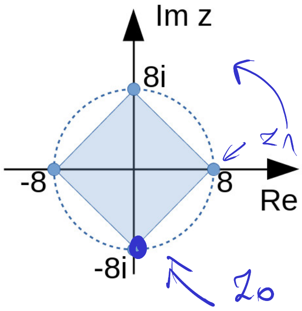
$z^4 = \left((\sqrt{3}-i)^3\right)^4$

Niech $z_0 = (\sqrt{3}-i)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i$.

Kolejne wierzchołki kwadratu otrzymujemy przez obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$, co odpowiada mnożeniu przez $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$z_1 = z_0 \cdot i = 8, \quad z_2 = z_1 \cdot i = 8i, \quad x_3 = z_2 \cdot i = -8$

$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 \cdot i = i$



$\frac{\pi}{2}$ obrót $\quad \cdot\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_1 = z_0 \cdot i = -8i \cdot i = 8$

z_0 - zauważyliśmy

Uwaga 2.3.6. Rozwiązywanie równań w $\mathbb{R}$ i w $\mathbb{C}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \{-3, 3\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, -i, i\}$
$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$	$\sqrt{z^2} = \{-z, z\}$

$\sqrt{x}$ $\quad x^2$ $\quad x \in [0,1)$

$\sqrt{a} = b$
$b^2 = a \wedge b \geq 0$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 =$
$= (-1)\cdot(-1) = 1$

Równania wielomianowe (rów. algebraiczne)

$z^n = 5 + i$
$1 \cdot z^n - (5+i) = 0$

Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej z stopnia n.
$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0, \quad c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0$

Definicja 2.3.7. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem wielomianu* W, jeżeli $W(z_0) = 0$.

Twierdzenie 2.3.8 (Bézout)**.** Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$.

Dowód. Dzieląc przez dwumian $z - z_0$, otrzymujemy $W(z) = (z - z_0)P(z) + const$. Stąd $W(z_0) = 0 \iff W(z) = (z - z_0)P(z)$. $\square$

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.3.9. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem k-krotnym wielomianu W*, jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

więcej razy już nie

Przykład 2.3.10. Niech $W(z) = z^3 - z^2 - z + 1$. Faktoryzując, otrzymujemy $W(z) = z^2(z-1) - (z-1) = (z-1)(z^2-1) = (z-1)^2(z+1)$.
Zatem $z = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Twierdzenie 2.3.11 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Wniosek 2.3.12. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w $\mathbb{C}$, licząc z krotnościami.

$\mathbb{R}$

$x^2+1=0$

Dowód. Niech W będzie wielomianem stopnia n oraz niech $z_1, z_2 \ldots, z_m$ to jego wszystkie pierwiastki o krotnościach $k_1, k_2 \ldots, k_m$, odpowiednio. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry i twierdzenia Bézout otrzymujemy $k_1 + k_2 \ldots + k_m = n$ oraz

$$W(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_m)^{k_m}. \qquad \square$$

$\mathbb{C}$

$z^2+1=0$

$z^2-(-1) = z^2 - i^2$

$= (z-i)(z+i)$

Trójmian kwadratowy $\qquad az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ oraz $\sqrt{\Delta} = \{-\delta, \delta\}$.

Gdy $\Delta \neq 0$, otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

$x^4+1=0$

$(x^2+1)^2-2x^2=0$

$(x^2+\sqrt{2}x+1)$

$(x^2-\sqrt{2}x+1)$

Przykład 2.3.13. Rozwiąż równanie $z^2 + 2iz + 3 = 0$.
Obliczamy $\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2$, $\sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$.
Niech $\delta = 4i$, wówczas $z_1 = -3i$ oraz $z_2 = i$.

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych

Niech $k \in \mathbb{N}$.

!

Twierdzenie 2.3.14. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W.

Dowód. Niech $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Udowodnimy twierdzenie dla pierwiastków jednokrotnych. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $W(z_0) = 0$. Wówczas

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = 0$$

$$\Rightarrow\; \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0.$$

Ponieważ $\overline{a_k} = a_k$, zatem $W(\bar{z}_0) = a_n(\bar{z}_0)^n + a_{n-1}(\bar{z}_0)^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0$. $\square$

Wniosek 2.3.15. Wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

	1	−3	6	−4
1	1	−2	4	0

współcz. z $\mathbb{R}$

Przykład 2.3.16. Rozwiąż równanie $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

$+3 \quad -(-3) \quad -3i^2 \quad -(\sqrt{3}i)^2$

$$0 = (z-1)(z^2 - 2z + 4) = (z-1)[(z-1)^2 + 3] = (z-1)[(z-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2] =$$
$$= (z-1)(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i)$$

rozwiązania $z_1 = 1, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i, \quad \bar{z}_2 = z_3$

!

współcz. z $\mathbb{C}$!

Przykład 2.3.17. Rozwiąż równanie $z^4 + (2+i)z^3 + (7+2i)z^2 + (12+i)z + 6 = 0$, wiedząc, że $z_1 = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań.

wcale z tego nic wynika że $-2i$ też pierwiastek !

$$(z-2i)\Big(z^3 + (2+3i)z^2 + (1+6i)z + 3i\Big) = 0$$
$$(z-2i)(z+1)\Big(z^2 + (1+3i)z + 3i\Big) = (z-2i)(z+1)^2(z+3i) = 0$$

rozwiązania $z_1 = 2i$, $z_2 = z_3 = -1$, $z_4 = -3i$

BO

	1	2+i	7+2i	12+i	6
2i	1	2+3i	1+6i	3i	0

$z_1 \neq \overline{z_4}$

Wzory Viète'a

Twierdzenie 2.3.18. Niech $W \in \mathbb{C}[z]$, $W(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, gdzie $c_n \neq 0$ ma pierwiastki (niekoniecznie różne) $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$. Wówczas

$n=2$

$c_2 z^2 + c_1 z^1 + c_0 z^0$

a b c

$$\begin{aligned} c_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) &= -c_{n-1} \\ c_n\Big[(r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_1r_n) + (r_2r_3 + r_2r_4 + \ldots + r_2r_n) + \ldots + r_{n-1}r_n\Big] &= c_{n-2} \\ \ldots& \\ c_n r_1 r_2 \ldots r_n &= (-1)^n c_0 \end{aligned}$$

Dowód. Niech $W(z) = c_n(z-r_1)(z-r_2)\cdot\ldots\cdot(z-r_n)$. Wymnażając, otrzymujemy

$$W(z) = c_n\big[(-1)^n r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n + (-1)^{n-1} r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot z + (-1)^{n-1} r_1 r_3 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot z + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} r_2 r_3 \cdot \ldots \cdot r_{n-1} \cdot z + \ldots + (-r_1 - r_2 \ldots - r_n)z^{n-1} + z^n\big]. \qquad \square$$

a b d

Przykład 2.3.19. Wielomian $W(z) = 2z^3 - 5z^2 + cz - 5$, $c \in \mathbb{R}$ ma pierwiastek $z_1 = 1 - 2i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartość współczynnika c.

Wielomian ma współczynniki rzeczywiste, zatem $z_2 = 1 + 2i$.

$z_2 = \overline{z_1}$

Oznaczmy $a = 2$, $b = -5$, $d = -5$.

2

Na mocy wzorów Viète'a otrzymujemy $z_1 + z_2 + z_3 = 2 + z_3 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$.
Zatem $z_3 = \frac{1}{2}$ oraz $W(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{c}{2} - 5 = 0 \ \Rightarrow \ c = 12$.

2.4 Interpretacja geometryczna

Niech $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Niech $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

1) $|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

$$|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2) $|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

$|z-1| = 5$

$S = (1, 0)$

$r = 5$

$$r = |(x - x_1) + (y - y_1)i| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \Rightarrow r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

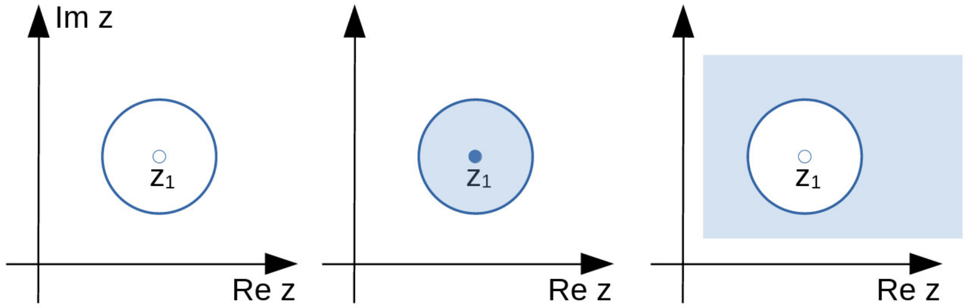
$|x + iy - 1| = 5$

$|(x-1) + iy| = 5$

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 5$

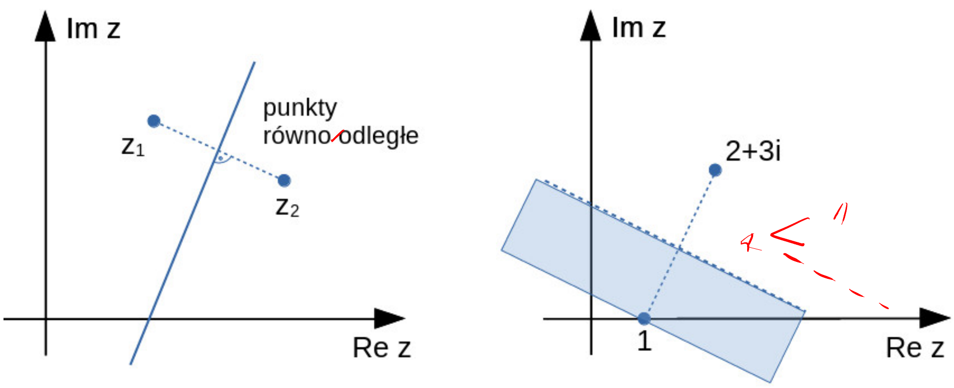
$(x-1)^2 + y^2 = 25$

$|z - z_1| = r$ okrąg $\quad |z - z_1| \le r$ koło $\quad |z - z_1| \ge r$ zewnętrze koła



3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2

!!



$z_1 = 1$

$z_2 = 2 + 3i$

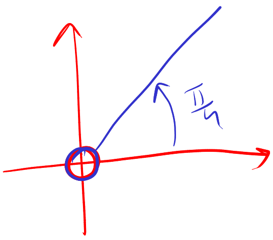
np. $|z - 1| < |z - 2 - 3i|$

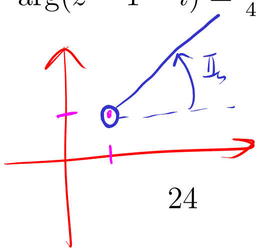
4) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ ustalony, to półprosta.

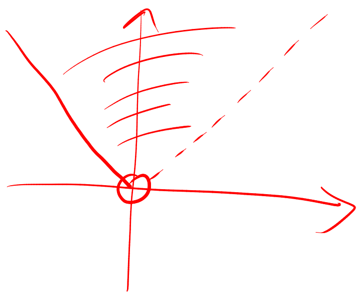
Przykład 2.4.1.

$\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{4}$

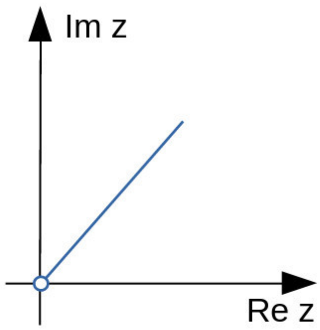
$\arg z = \frac{\pi}{4}$ $\quad \arg(z - 1 - i) = \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{\pi}{4} < \arg z \le \frac{3}{4}\pi$

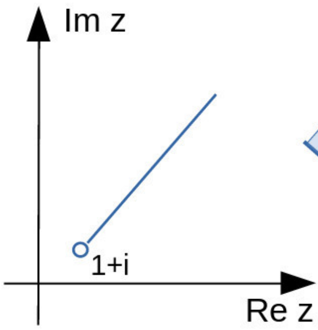


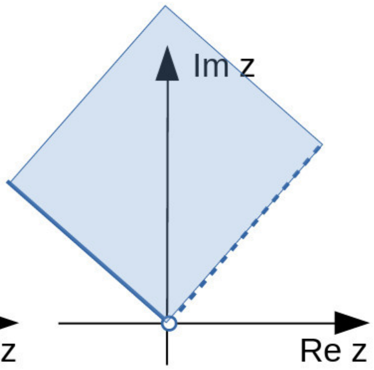




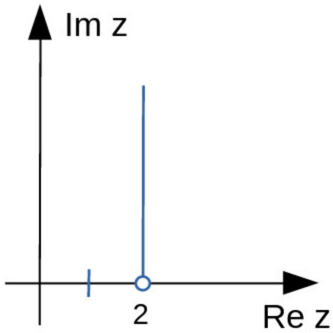
$z_0 = 1 + i$

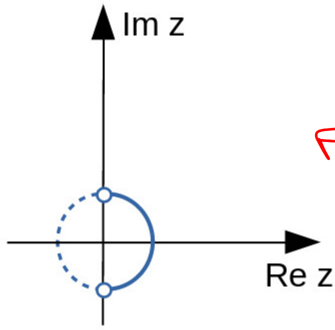






$\arg(z-2)=\frac{\pi}{2}$ $\arg(\frac{z+i}{z-i})=\frac{\pi}{2}$





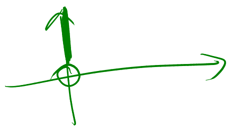
5) Zbiór $\{z\in\mathbb{C}:\ \arg(\frac{z+i}{z-i})=\frac{\pi}{2}\}$ to łuk na okręgu.

$z = x + iy$

$$w=\frac{z+i}{z-i}=\frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i}=\frac{[x+(y+1)i]\cdot[x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x^2-xyi+xi+xyi+xi+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$$

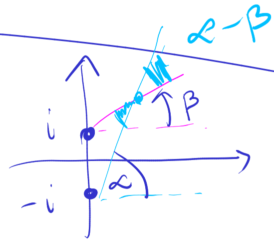
$$\mathrm{Re}w=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2},\quad \mathrm{Im}w=\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\mathrm{Re}w=0\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2=1\\ \mathrm{Im}w>0\ \Leftrightarrow\ x>0\end{cases}$$

$\arg(w)=\frac{\pi}{2}$



$w = a + bi$
$a = 0$
$b > 0$

$\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}$



$\boxed{\arg(z-z_1)-\arg(z-z_2)=\text{const}}$

$\arg(z-i)=\beta$
$\arg(z+i)=\alpha$

$z_1 \quad z_2$
$-i \quad i$

$z-(-i)$
$z+i$