Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 3
Data: ....

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

3.1 Macierze i ich własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 3.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m\times n}$.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ nazywamy *i-tym wierszem* macierzy A, zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ nazywamy *j-tą kolumną* macierzy A.

Oznaczmy symbolem $M_{m\times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K. Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n.*

Dla $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ a_{ij} = b_{ij}$.

Przykład 3.1.2. $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

$$B \in M_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \quad \text{macierz zerowa wymiaru } m \times n$$

Typy macierzy

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *diagonalną* lub *przekątniową*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$

b) *trójkątną górną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$

c) *trójkątną dolną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

Oznaczmy:
$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n
$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n $\qquad T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$
$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^D(K) \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^G(K)$$

Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
  $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
  $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
  Oznaczamy $-A = (-1) \cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$.

- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m\times \mathbf{p}}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{\mathbf{p}\times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
  $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$
  Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{r-razy}$

- Transponowanie: Niech $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
  $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n\times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$

Przykład 3.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB, BA, D^2.

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{2}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$D = AB \in M_2(\mathbb{R})$ schemat Falka

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 1 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & \color{red}{1} & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 20 \end{array} \qquad \color{red}{1} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$$

$G = BA \in M_3(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 10 & 14 & 18 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$AB \neq BA$

$D^2 = D \cdot D \in M_2(\mathbb{R})$, $CA \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, zaś AC jest niewykonalne

$CD \in M_2(\mathbb{R})$, $DC \in M_2(\mathbb{R})$, $CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$, $DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}$, $CD \neq CD$

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m\times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $A + B = B + A$

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$

iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

Wniosek 3.1.7. $(M_{m\times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(AB)C = A(BC)$

ii) $(A + B)C = AC + BC$

iii) $A(B + C) = AB + AC$

iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

v) $AI = A$

vi) $IA = A$

Wniosek 3.1.9. $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemienną z jedynką.

Twierdzenie 3.1.10. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$

Definicja 3.1.11. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ nazywamy *śladem macierzy* A i oznaczamy symbolem $\mathrm{tr}(A)$.

Przykład 3.1.12. $\mathrm{tr}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

Własności śladu macierzy

Twierdzenie 3.1.13. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$ ii) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

iii) $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$ iv) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Wniosek 3.1.14. Jeśli $A, B \in M_{m\times n}(K)$, to wówczas $\mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}(BA^T)$.

Definicja 3.1.15. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$

Twierdzenie 3.1.16. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left[(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

Przykład 3.1.17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antysymetryczna

Definicja 3.1.18. Macierz utworzoną z macierzy A_{ij}, dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{array}\right]$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ stojące w i-tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ stojące w j-tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

3.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 3.2.1. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$
  $= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j-tej kolumny.

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det B_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

Metoda Sarrusa

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6)$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{matrix} \qquad -\Big[3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2\Big] = -59$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K.

i) *Minorem elementu* a_{ij} nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n-1$ otrzymanej poprzez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A. Oznaczamy go symbolem M_{ij}.

ii) *Dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$

$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$, $\quad M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$

$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{23} = 17$

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace'a)**.** Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$,

(rozwinięcie względem i-tego wiersza)

ii) $\forall j \in \{1,2,\ldots,n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{kj}$.

(rozwinięcie względem j-tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

$$\det B = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem czwartej kolumny,

a potem względem ostatniego wiersza.

$$\det C = 4 \cdot (-1)^9 M_{54} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$$

$$-12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$$

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$$

$$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$$

Własności wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k-tą kolumnę macierzy A, czyli $A = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$.

Twierdzenie 3.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\det A = \det(A^T)$

ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.

iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.

iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \ldots, B_k, \ldots, A_n] + \det[A_1, \ldots, C_k, \ldots, A_n]$

v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$.

vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$.

vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in K : \ A_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$.

viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A, to wyznacznik nie zmieni się.

ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

x) Jeśli macierz A jest macierzą blokową postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ \hline \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \hline ? & ? & \ldots & B_n \end{array}\right],$$

gdzie $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni), $\mathbf{0}$ macierzami zerowymi, zaś **?** dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \ldots \cdot \det B_n$.

Przykład 3.2.10.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right] \quad \textit{macierz} \quad \textit{blokowo} - \textit{diagonalna}$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = (2-7) \cdot (40-15) = -125$$

Wniosek 3.2.11. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$

iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

Operacje elementarne:	$w_i \leftrightarrow w_j$	zamiana wierszy miejscami (między sobą)
	$\lambda \cdot w_i,\ \lambda \in K, \lambda \neq 0$	pomnożenie wiersza przez liczbę (różną od zera)
	$w_i + \lambda \cdot w_j,\ \lambda \in K$	dodanie do w_i wielokrotności w_j

Przykład 3.2.12.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{w_1 \leftrightarrow w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{w_4 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}}{\overset{w_2 - 2w_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_3 - w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{-\frac{1}{3} \cdot w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_4 + 5w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \tfrac{22}{3} = -22$$

3.3 Macierz odwrotna

Definicja 3.3.1. Macierz $B \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy $A \in M_n(K)$, jeżeli $AB = BA = I_n$. Oznaczamy ją wówczas symbolem A^{-1}.

Przykład 3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$$

$AA^{-1} = I \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; c = 0 \wedge \quad c = 1$ sprzeczność

Zatem nie istnieje A^{-1}.

Definicja 3.3.3. i) Macierz $A \in M_n(K)$, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy macierzą *odwracalną*.

ii) Macierz $A \in M_n(K)$ taką, że $\det A = 0$ nazywamy macierzą *osobliwą*. W przeciwnym wypadku nazywamy ją macierzą *nieosobliwą*.

Twierdzenie 3.3.4. a) Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

b) Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$.

Definicja 3.3.5. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Macierz D^T nazywamy *macierzą dołączoną* do macierzy A i oznaczamy symbolem A^D.

Wniosek 3.3.6. Zbiór macierzy kwadratowych nieosobliwych stopnia n o elementach z ciała K wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę nieprzemienną. Grupę tę oznaczamy symbolem $GL_n(K)$ i nazywamy *ogólną grupą liniową*.

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

1. **Za pomocą definicji**

Przykład 3.3.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$

$\det A = 11 \neq 0$, zatem A jest odwracalna.

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a-b & 5a+2b \\ 3c-d & 5c+2d \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=1 \\ 5a+2b=0 \\ 3c-d=0 \\ 5c+2d=1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

2. **Metoda dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa)**

Przykład 3.3.8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D = ?$$

$\det A = -3 \neq 0$, zatem A jest odwracalna. Niech $M = [M_{ij}]$ oznacza macierz minorów elementów a_{ij}. Wówczas

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = [D_{ij}] = [(-1)^{j+j} M_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \; A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

3. **Metoda operacji elementarnych (metoda bezwyznacznikowa)**

Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą.

$$[A|I] \xrightarrow[\textbf{tylko na wierszach!}]{operacje \quad elementarne} [I|A^{-1}]$$

Algorytm Gaussa: macierz nieosobliwa $\longrightarrow$ macierz trójkątna górna $\longrightarrow I$

Metoda eliminacji Gaussa to praktyczny sposób używania metody operacji elementarnych.

Przykład 3.3.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \, na \, koniec]{-\frac{1}{2}w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 + w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}w_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 + w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Zatem $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Własności macierzy odwrotnej

Twierdzenie 3.3.10. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli macierze A i B są odwracalne, to wówczas macierze $A^{-1}, A^T, AB, \alpha A, A^r$ również są odwracalne i prawdziwe są następujące równości.

i) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ iv) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$
ii) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ v) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
iii) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$ vi) $\left(A^r\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^r$

Przykład 3.3.11. Wyznaczymy macierz X spełniającą równanie $XA = 2A - I$, gdzie
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Z kontekstu wynika, że A to macierz kwadratowa stopnia 4, zaś $I = I_4$.
Ponieważ $\det A = -4 \neq 0$, istnieje A^{-1}. Obliczamy

$$\begin{gathered} XA = 2A - I \\ XAA^{-1} = (2A - I)A^{-1} \\ XI = 2AA^{-1} - IA^{-1} \\ X = 2I - A^{-1} = 2I - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{gathered}$$

Przykład 3.3.12. Rozwiążemy równanie macierzowe $E^4(X - 4I)^T = \frac{1}{2}E^3F^3D^{-1}D^T$ wiedząc, że $D, E, F \in M_4(\mathbb{R})$ są nieosobliwe, ponadto macierz D jest macierzą symetryczną, zaś

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ D jest symetryczna, spełnia warunek $D = D^T$. Stąd $D^{-1}D^T = D^{-1}D = I$.
Ponadto F jest diagonalna, zatem $F^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Macierz E jest nieosobliwa, a zatem odwracalna. Obliczamy

$$\begin{gathered} E^4(X - 4I)^T = \tfrac{1}{2}E^3F^3D^{-1}D^T = \tfrac{1}{2}E^3F^3 \\ (X - 4I)^T = E^{-4}\tfrac{1}{2}E^3F^3 = \tfrac{1}{2}E^{-1}F^3 \\ X - 4I = (\tfrac{1}{2}E^{-1}F^3)^T = \tfrac{1}{2}(F^3)^T(E^{-1})^T \\ X = 4I + \tfrac{1}{2}(F^3)^T(E^{-1})^T. \end{gathered}$$

Pozostaje obliczyć E^{-1} i wykonać odpowiednie mnożenia oraz dodawania.

Twierdzenie 3.3.13. Jeśli macierz kwadratowa A jest macierzą blokowo-diagonalną postaci $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}$, to A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalne są macierze $A_1, A_2, \dots, A_k$. Wówczas $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^{-1} \end{bmatrix}$.

Przykład 3.3.14. Czy $A = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ jest odwracalna? Jesli tak, oblicz A^{-1}.

Jest to macierz blokowo-diagonalna $\left[\begin{array}{c|cc|c} 22 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \pi \end{array}\right]$.

Każdy z bloków jest macierzą nieosobliwą, zatem A jest odwracalna.

Obliczamy $\begin{bmatrix} 22 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$.

Stąd $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$