Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 3
Data: ....

K - ciało
~~körper~~

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

3.1 Macierze i ich własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

$i \in \{1, \ldots, m\}$
$j \in \{1, \ldots, n\}$
$(i,j) \xmapsto{A} A(i,j) = a_{ij}$

Komentarz
(a_n)
$\mathbb{N} \ni n \xmapsto{f} f(n) \in \mathbb{R}$
$\| $
a_n
f
$a_1, a_2, a_3, \ldots$

Definicja 3.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m\times n}$.

kolumna
wiersz

$$A = [a_{ij}]_{\underbrace{m}_{m \text{ wierszy}}\times \underbrace{n}_{n \text{ kolumn}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ nazywamy *i-tym wierszem* macierzy A, zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ nazywamy *j-tą kolumną* macierzy A.

MATRIX

Oznaczmy symbolem $M_{m\times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K. Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n*.

$n \times n$

Dla $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ a_{ij} = b_{ij}$.

macierze są równe gdy odpow. elementy są równe

Przykład 3.1.2. $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

3 wiersze 4 kolumny

$A = [a_{ij}]$

a_{23}

kwadratowa stopnia 3

$B \in M_3(\mathbb{R})$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

DIAGONALA (przekątna główna)

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$ macierz zerowa wymiaru $m \times n$

Typy macierzy

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *diagonalną* lub *przekątniową*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ poza przekątną zera

NA PRZEKĄTNEJ a_{11} a_{22} a_{33} $\vdots$

b) *trójkątną górną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$

c) *trójkątną dolną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

Oznaczmy:
$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n
podobnie
$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n
$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

$$T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$$

L lower triangular

U upper triangular

Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

macierz diagonalna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^{\overset{G}{\cancel{D}}}(K) \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^{\overset{D}{\cancel{G}}}(K)$$

Działania na macierzach

tego samego wymiaru

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
  $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
  $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
  Oznaczamy $-A = (-1) \cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$.

  liczba kolumn A   liczba wierszy B
- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m\times \mathbf{p}}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{\mathbf{p}\times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
  $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$
  Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{r-razy}$
- Transponowanie: Niech $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
  $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n\times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$

  zmiana!

Np. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 2×3

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 3×2

Przykład 3.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB, BA, D^2.

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{\cancel{2}\,5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$[1, 2, 3] \circ [0, 2, -1]$ → TO

$D = AB \in M_2(\mathbb{R})$ schemat Falka

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 1 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 20 \end{array}$$

$1 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$

$= 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1$

$A \cdot B$

$A \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$

$B \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$

$D \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 10 & 14 & 18 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$G = BA \in M_3(\mathbb{R})$

3×3

$2 \cdot 3 + 2 \cdot 6$

$B_{3\times2}$ $A_{2\times3}$

$AB \neq BA$

$D^2 = D \cdot D \in M_2(\mathbb{R})$, $CA \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$, zaś AC jest niewykonalne

$CD \in M_2(\mathbb{R})$, $DC \in M_2(\mathbb{R})$, $CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$, $DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}$, $CD \neq CD$

Własności działań na macierzach

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m\times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

"+" wewn.

i) $A + B = B + A$ przemienne

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ łączne

iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$ el. neutralny

rozdzielność

suma liczb

iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ ← suma macierzy

vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

$A + A' = \mathbf{0}$ el. neutr.

$A' = -A$

Wniosek 3.1.7. $(M_{m\times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(AB)C = A(BC)$ łączne " · " mnożenie

ii) $(A + B)C = AC + BC$

iii) $A(B + C) = AB + AC$ rozdzielne wzgl. +

iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

NA OGÓŁ $AB \neq BA$

v) $AI = A$

vi) $IA = A$

I el. neutralny mnożenia

$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$AI = IA = A$

Wniosek 3.1.9. $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemienną z jedynką.

Twierdzenie 3.1.10. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

! iv) $(AB)^T = B^T A^T$

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$

$A_{2\times 3}$ $B_{3\times 4}$ $AB_{2\times 4}$

BA niewykonalne

$B^T_{4\times 3}$ $A^T_{3\times 2}$ $B^T A^T_{4\times 2}$

$(A(BC))^T$ $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

Definicja 3.1.11. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ nazywamy *śladem macierzy* A i oznaczamy symbolem $\mathrm{tr}(A)$.

" trace "

Przykład 3.1.12. $\mathrm{tr}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

$A \cdot A = A^2$

$f \circ f$ $\quad f^2$

NA POTEM

Własności śladu macierzy

$(A^2)^T$ $\quad (A \cdot A)^T = A^T \cdot A^T = (A^T)^2$

Twierdzenie 3.1.13. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$ ii) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

iii) $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$ iv) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Wniosek 3.1.14. Jeśli $A, B \in M_{m\times n}(K)$, to wówczas $\mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}(BA^T)$.

Definicja 3.1.15. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$

Twierdzenie 3.1.16. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left[(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

Przykład 3.1.17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antysymetryczna

na przekątnej zera ZAWSZE

$A^T = -A$

$a_{11} \quad a_{22} \xrightarrow{T} \underset{-a_{11}}{a_{11}} \quad \underset{-a_{22}}{a_{22}}$

Definicja 3.1.18. Macierz utworzoną z macierzy A_{ij}, dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{array}\right]$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ stojące w i-tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ stojące w j-tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

$(-1)^{1+1} \quad (-1)^{1+2} \quad -b$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

3.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

!

Definicja 3.2.1. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

determinant

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$
  $= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

$A = [a_{11}]$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j-tej kolumny.

$\det A \in K$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \in K$

$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \to A_{11} \qquad \det A_{11}$

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$

$1 \quad 1 \quad (-1) \quad -2 \quad +1 \quad 3$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \det B = (-1)^{1+1}a_{11}\det B_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det B_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}\det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

to samo!

Metoda Sarrusa

nie uogólnia się na nxn 5x5 itd

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6)$$
$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{matrix} \qquad - [3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2] = -59$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K.

i) *Minorem elementu* a_{ij} nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n-1$ otrzymanej poprzez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A. Oznaczamy go symbolem M_{ij}.

ii) *Dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$ $\qquad a_{32} = -6$

$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$, $\quad M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$

$D_{32} = (-1)^{3+2}M_{23} = 17$

minor elementu a_{32}

dopełnienie algebraiczne

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace'a)**.** Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$,

(rozwinięcie względem i-tego wiersza)

$a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}$

$a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}$

ii) $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{kj}$.

(rozwinięcie względem j-tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

nie trzeba liczyć

$\det B = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$(-1)^{2+2}$ $\quad M_{22}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem czwartej kolumny,

$4 = a_{54}$

a potem względem ostatniego wiersza.

$\det C = 4 \cdot (-1)^9 M_{54} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$

$3 = a_{41}$

$2 = a_{42}$

$- 12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$

$(-1)^{4+1}$ $\quad (-1)^{4+2}$

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Tw. Laplace'a

$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$

D

$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$

Własności wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k-tą kolumnę macierzy A, czyli $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$.

ĆWICZENIA

Twierdzenie 3.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

w wierszach też można

i) $\det A = \det(A^T)$ ← wynika z tw. Laplace'a

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.

iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.

$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix} = 2(ad - bc)$

iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \dots, B_k, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, C_k, \dots, A_n]$

v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ $k_1 \leftrightarrow k_2$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$.

vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K: \ A_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$.

k_1 k_2

viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A, to wyznacznik nie zmieni się.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 6 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $3 \cdot k_2$ $k_1 - 3k_2$

ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

x) Jeśli macierz A jest macierzą blokową postaci

$\alpha \cdot k_1 + \beta \cdot k_2 + \gamma k_3$ $k_1 - 20k_2 - 7k_3$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline ? & ? & \dots & B_n \end{array}\right],$$

gdzie $B_1, B_2, \dots, B_n$ są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni), $\mathbf{0}$ macierzami zerowymi, zaś **?** dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \ldots \cdot \det B_n$.

Przykład 3.2.10.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right] \quad macierz \quad blokowo-diagonalna$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = (2-7) \cdot (40-15) = -125$$

Wniosek 3.2.11. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$

iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

Operacje elementarne:		
	$w_i \leftrightarrow w_j$	zamiana wierszy miejscami (między sobą)
	$\lambda \cdot w_i,\ \lambda \in K, \lambda \neq 0$	pomnożenie wiersza przez liczbę (różną od zera)
	$w_i + \lambda \cdot w_j,\ \lambda \in K$	dodanie do w_i wielokrotności w_j

Przykład 3.2.12.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{w_1 \leftrightarrow w_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{w_4 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}}{\overset{w_2 - 2w_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_3 - w_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{-\frac{1}{3}\cdot w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_4 + 5w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{22}{3} = -22$$

Przykład 3.2.13. Dane są macierze $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ takie, że $A = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \ i \neq j \\ 2(i-1)+j & ; \ i = j \end{cases}$, zaś $\det B = 9$. Oblicz wyznacznik macierzy $C = 3B^3A^{-1}B^T$.

Korzystając z własności wyznaczników, obliczamy

$$\det C = 3^5 \det(B^3) \frac{1}{\det A} \det(B^T) = 3^5 \frac{(\det B)^4}{\det A}.$$

$$\text{Ponadto } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix} \underset{\substack{w_4 - w_1 \\ w_5 - w_1}}{\overset{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12.$$

Zatem $\det C = 3^5 \frac{9^4}{3^5 \cdot 2^3} = \frac{9^4}{8} = \frac{6561}{8}$.