Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 5
Data: ....

TEMAT: *Geometria analityczna w* $\mathbb{R}^3$

5.1 Wektory w przestrzeni

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować jako:

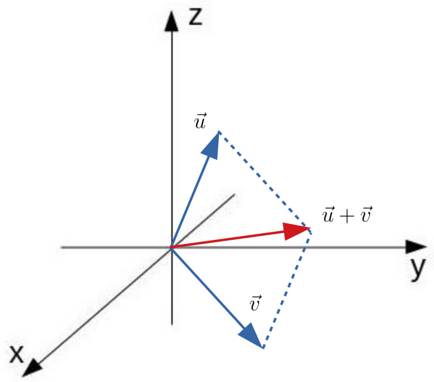
- zbiór punktów $P = (x, y, z)$, gdzie x, y, z to współrzędne punktu
- zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = [x, y, z]$, gdzie x, y, z to współrzędne wektora
- zbiór wektorów swobodnych $\vec{a}$. Wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów zaczepionych (w różnych punktach) mających ten sam zwrot, kierunek i długość.

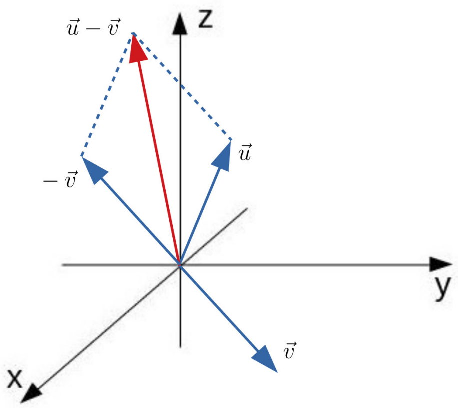
Oznaczamy przez $\vec{\mathbf{0}} = [0, 0, 0]$ wektor zerowy.

Działania na wektorach

Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z]$	suma wektorów
$\lambda \cdot \vec{u} = [\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z]$	iloczyn wektora przez skalar
$-\vec{u} = [-u_x, -u_y, -u_z]$	wektor przeciwny do $\vec{u}$
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$	różnica wektorów





Długość wektora

Oznaczamy przez $|\vec{u}|$ długość wektora $\vec{u}$. Jeśli $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to wówczas

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \quad |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Wektor długości 1 nazywamy *wersorem.* Oznaczamy przez $\hat{\imath} = [1, 0, 0], \hat{\jmath} = [0, 1, 0], \hat{k} = [0, 0, 1]$ wersory osi układu współrzędnych. Wówczas zapis $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ oznacza $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$. Ponadto $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

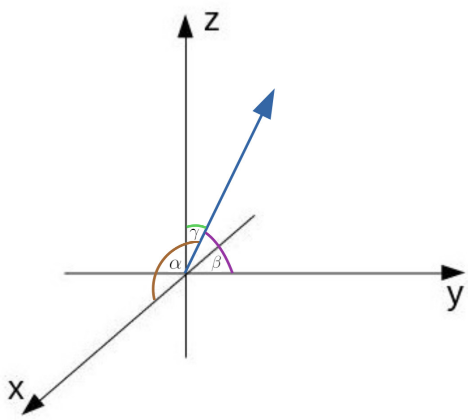
Własności długości: $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{\mathbf{0}}$, $\quad |\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$, $\quad |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Wersorem niezerowego wektora $\vec{u}$ nazywamy wersor o tym samym kierunku i zwrocie co $\vec{u}$. Oznaczamy go $\hat{u}$. Oczywiście $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$.

Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, to $\hat{u} = \left[\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|}\right]$ oraz

$$|\hat{u}| = \sqrt{\frac{u_x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{1}{|\vec{u}|^2}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1.$$

Jeśli wektor $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych kąty α, β, γ, odpowiednio, to kąty te nazywamy *kątami kierunkowymi*, zaś współrzędne wersora $\hat{u}$, czyli liczby $\cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|}$, $\cos\beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}$, $\cos\gamma = \frac{u_z}{|\vec{u}|}$ nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora $\vec{u}$.



Iloczyn skalarny

Oznaczamy przez $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ kąt między wektorami $\vec{u}, \vec{v}$,.
Przyjmujemy, że jego miara należy do przedziału $[0, \pi]$.

Definicja 5.1.1. *Iloczynem skalarnym* dwóch niezerowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy liczbę $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$. Oznaczamy ją symbolem $\vec{u} \circ \vec{v}$. Gdy jeden z wektorów jest zerowy, przyjmujemy, że iloczyn jest równy 0.

Twierdzenie 5.1.2. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas $\vec{u} \circ \vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z$.

Przykład 5.1.3. $[1, 4, 0] \circ [2, -1, 1] = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -2 < 0$
Cosinus kąta między wektorami jest ujemny, zatem kąt jest rozwarty.

Twierdzenie 5.1.4 (Własności iloczynu skalarnego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$

ii) $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$

iii) $(\lambda\vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v})$

iv) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$

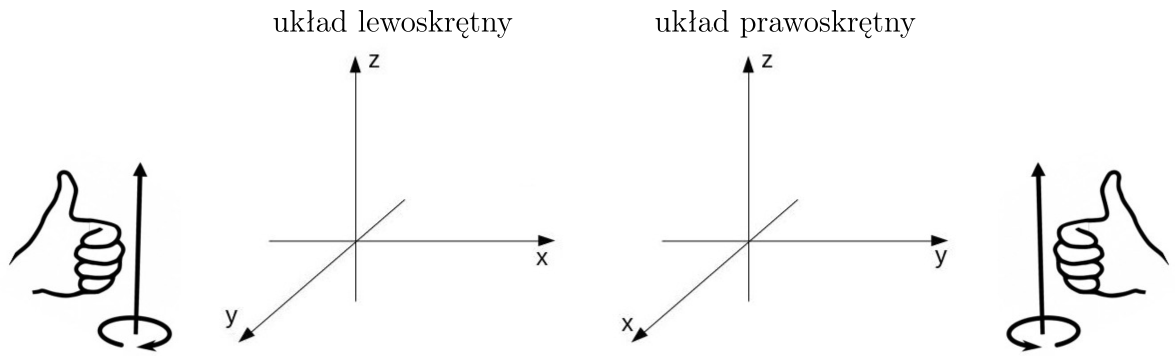
v) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

vi) $\vec{u} \neq \vec{\mathbf{0}}, \vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{u} \circ \vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} \perp \vec{v}$

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ - trójka wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w jednym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych.



Definicja 5.1.5. Uporządkowana trójka wektorów $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ma *orientację zgodną* z orientacją układu współrzędnych, jeśli

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0.$$

Iloczyn wektorowy

Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy *współliniowymi* lub *kolinearnymi*, gdy istnieje prosta, w której zawate są te wektory. Piszemy wówczas $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Definicja 5.1.6. *Iloczynem wektorowym* uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$ taki, że:

i) $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$,

ii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$,

iii) orientacja trójki $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.

Wektor $\vec{w}$ oznaczamy symbolem $\vec{u} \times \vec{v}$.
Jeśli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to przyjmujemy $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Przykład 5.1.7. $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \quad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}, \quad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}, \quad \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}, \quad \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$

Twierdzenie 5.1.8. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Przykład 5.1.9. Niech $\vec{u} = [1, 2, -3], \vec{v} = [3, 4, 5]$. Korzystamy z twierdzenia Laplace'a

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\imath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = [22, -14, -2]$$

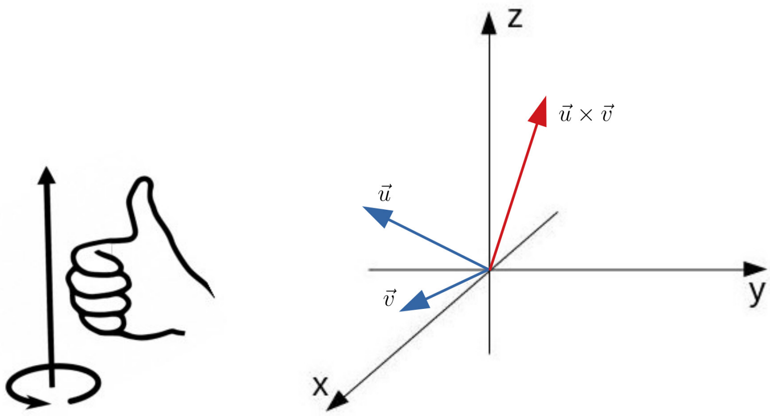
lub metody Sarrusa

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\imath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10\hat{\imath} + 4\hat{k} - 9\hat{\jmath} - 6\hat{k} + 12\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} = 22\hat{\imath} - 14\hat{\jmath} - 2\hat{k}.$$

Twierdzenie 5.1.10 (Własności iloczynu wektorowego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
ii) $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$
iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
iv) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
v) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
vi) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \left(\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{\mathbf{0}} \vee \vec{v} = \vec{\mathbf{0}}\right)$

Reguła prawej dłoni:



Uwaga 5.1.11. Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}$ równe jest $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Iloczyn mieszany

Definicja 5.1.12. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$,$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. *Iloczynem mieszanym* uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy liczbę $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$. Oznaczamy ją symbolem $\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)$.

Twierdzenie 5.1.13. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$,$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Wówczas

$$\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Dowód. $$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = w_x \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} =$$
$$= [w_x, w_y, w_z] \circ \left[\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right] = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v}) \quad \square$$

Uwaga 5.1.14. Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ równa jest $|\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)|$.

Dowód. Niech $\alpha = \measuredangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$. Ponieważ $V = P_p \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h$ oraz $\cos\alpha = \frac{h}{|\vec{w}|}$, zatem $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\alpha = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$. $\square$

Przykład 5.1.15. Czy punkty $A = (1, 0, 2), B = (5, 1, 5), C = (3, -1, 2), D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie?

Punkty leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy objętość czworościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ jest równa zero.

$\overrightarrow{AB} = [4, 1, 3]$, $\overrightarrow{AC} = [2, -1, 0]$, $\overrightarrow{AD} = [0, 3, 3]$
$$\Big(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\Big) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 18 - 6 = 0$$
Punkty są współpłaszczyznowe (komplanarne).

Twierdzenie 5.1.16 (Własności iloczynu mieszanego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) = -\big(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\big) = \big(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\big)$

ii) $\lambda\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) = \big(\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) = \big(\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}\big) = \big(\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}\big)$

iii) $\big(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}\big) = \big(\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}\big) + \big(\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}\big)$

iv) $|\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$

5.2 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie ogólne i normalne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{\mathbf{0}}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}\}$$

jest płaszczyzną przechodząca przez punkt P_0 i prostopadłą do wektora $\vec{n}$. Wektor $\vec{n}$ nazywamy *wektorem normalnym* płaszczyzny π.

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Równanie normalne: $\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
Równanie ogólne: $\pi : Ax + By + Cz + D = 0,\ D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Przykład 5.2.1. $P_0 = (1, 2, 5), \vec{n} = [1, -1, 3]$, $P_0 \in \pi$, $\vec{n} \perp \pi$, $\pi =?$

$\pi :\ 1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 5) = 0$ równanie normalne

$\pi :\ x - y + 3z - 14 = 0$ równanie ogólne

Równanie parametryczne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z] \neq \vec{\mathbf{0}}$ ustalonymi wektorami niewspółliniowymi, tj. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \exists t, s \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b}\}$$

jest płaszczyzną przechodząca przez punkt P_0 i równoległą do wektorów $\vec{a}, \vec{b}$. Mówimy, że wektory $\vec{a}, \vec{b}$ są *wektorami rozpinającymi* płaszczyznę π.

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t[a_x, a_y, a_z] + s[b_x, b_y, b_z]$$

Równanie parametryczne: $$\pi : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x + s \cdot b_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y + s \cdot b_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z + s \cdot b_z \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}$$

Przykład 5.2.2. Napisz równanie parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 4)$, $B = (2, 5, 4)$ i równoległej do osi Oy.

$$\overrightarrow{AB} = [1, 4, 0] \parallel \pi, \quad \hat{j} = [0, 1, 0] \parallel Oy \Rightarrow \hat{j} \parallel \pi, \quad A \in \pi$$

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot s &= 1 + t \\ y = 1 + 4 \cdot t + 1 \cdot s &= 1 + 4t + s \\ z = 4 + 0 \cdot t + 0 \cdot s &= 4 \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}$$

Inne równania płaszczyzny

Równanie postaci $\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad gdzie \quad a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, opisuje płaszczyznę przechodząca przez punkty $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$. Jest to tzw. *równanie odcinkowe* płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty
$P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ma postać

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, ponieważ $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1] \parallel \pi$ oraz $\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \perp \pi$, zatem
$\pi = \{P = (x, y, z) : \overrightarrow{P_1P} \perp \vec{n}\} = \{P = (x, y, z) : [x - x_1, y - y_1, z - z_1] \circ \vec{n} = 0\}$.

5.3 Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie parametryczne i kierunkowe prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{\mathbf{0}}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$l = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a}\}$$

jest prostą przechodząca przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\vec{a}$. Wektor $\vec{a}$ nazywamy *wektorem kierunkowym* prostej l.

$$P_0 \in l \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} \ : \ \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$

Równanie postaci $l : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ nazywamy *równaniem parametrycznym* prostej l.

Rugując z każdego z powyższych równań parametr t, otrzymujemy równanie postaci $l : \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$, które nazywamy *równaniem kierunkowym* prostej l.

Równanie krawędziowe prostej

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, gdzie $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ będą dwiema nierównoległymi płaszczyznami. Ich częścią wspólną jest prosta $l = \pi_1 \cap \pi_2$.

$$P \in l \quad \Leftrightarrow \quad (P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2)$$

Równanie krawędziowe: $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

Przykład 5.3.1. Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (2,3,1)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Oznaczmy $\vec{n}_1 = [6,-1,1] \perp \pi_1$, $\vec{n}_2 = [1,3,-2] \perp \pi_2$ oraz $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel l$.

Wówczas $\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = [-1,13,19]$ oraz $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 13t \\ z = 1 + 19t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

5.4 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

Wzajemne położenie płaszczyzn

Niech $\pi_1 :\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n_1} = [A_1, B_1, C_1] \neq \vec{\mathbf{0}}$,
$\pi_2 :\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n_2} = [A_2, B_2, C_2] \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Szukanie punktów wspólnych π_1 oraz π_2 polega na rozwiązaniu układu równań
$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 \\ -D_2 \end{bmatrix}.$

Niech $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{bmatrix}$.

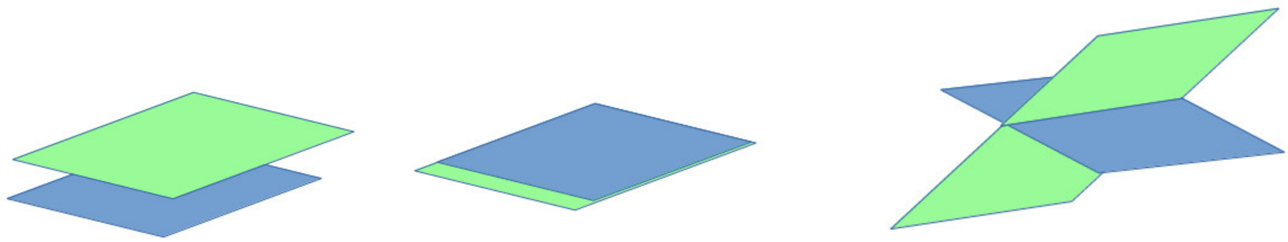
Płaszczyzny mogą być równoległe. $\quad \pi_1 \| \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \| n_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{\mathbf{0}}$

Wówczas albo $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = r(A) = 1$

albo $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = 2$, $r(A) = 1$.

Gdy $r(U) = r(A) = 2$, płaszczyzny $\pi_1 \nparallel \pi_2$ przecinają się wzdłuż prostej.
W szczególności mogą być prostopadłe.

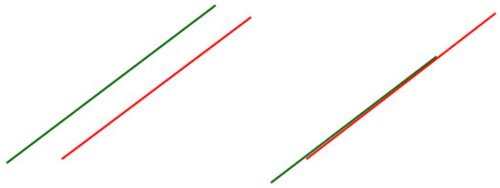
$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \circ \vec{n_2} = 0$$



Wzajemne położenie prostych

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l, przechodzącej przez punkt P_1, zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k, przechodzącej przez punkt P_2.

Proste mogą być równoległe. $\qquad l \| k \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{\mathbf{0}}$.
Wówczas albo $l = k$, albo $l \cap k = \varnothing$.

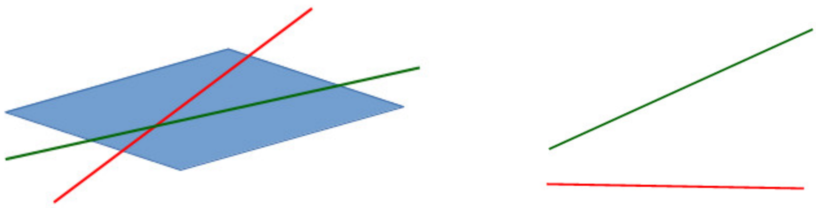


Gdy $l \nparallel k$, możliwe są dwie sytuacje.

1) Proste l i k leżą w jednej płaszczyźnie, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas l i k mają jeden punkt wspólny tj. $l \cap k = \{P\}$,

2) Proste l i k nie leżą w jednej płaszczyźnie (tzw. *proste skośne*), co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas $l \cap k = \varnothing$.

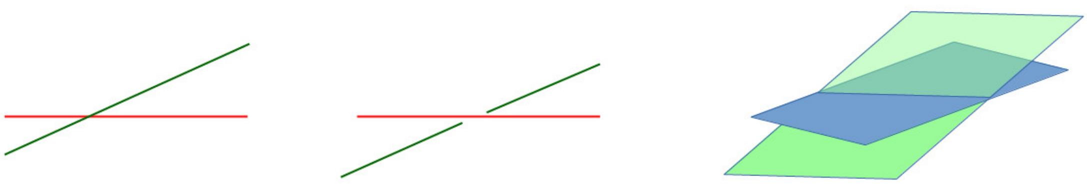
Zatem proste l i k są skośne wtedy i tylko wtedy gdy $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}\right) \neq 0$.



Kąty

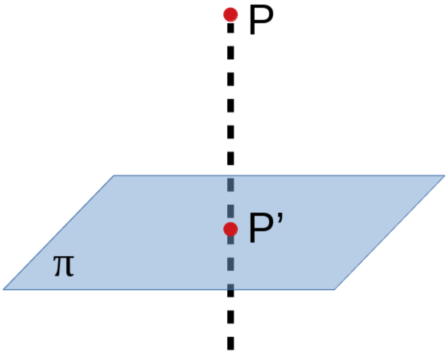
Definicja 5.4.1. i) *Kątem między dwiema prostymi* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy proste są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami kierunkowymi tychże prostych.

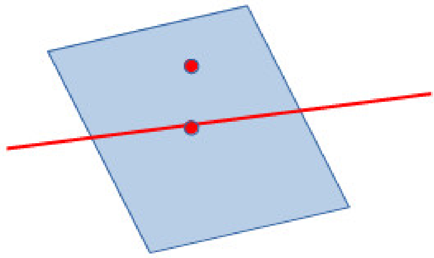
ii) *Kątem między dwiema płaszczyznami* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy płaszczyzny są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami normalnymi tychże płaszczyzn.



Definicja 5.4.2. i) *Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π* nazywamy punkt $P' \in \pi$ taki, że $PP' \perp \pi$.

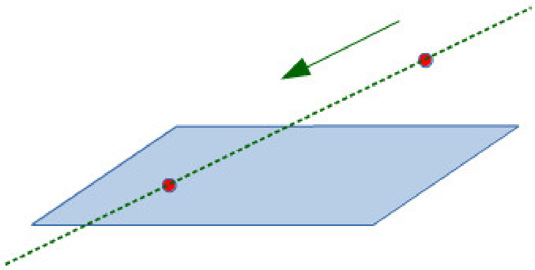
ii) *Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l* nazywamy punkt $P' \in l$ taki, że $PP' \perp l$.



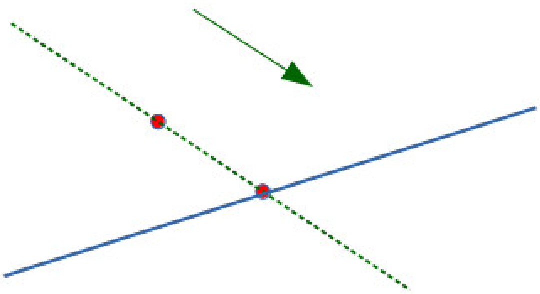


Można zdefiniować *rzut ukośny* w kierunku zadanego wektora.

Rzut punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora $\vec{v} \nparallel \pi$:



Rzut punktu P na prostą l w kierunku wektora $\vec{v}$, o którym zakładamy, że należy do płaszczyzny zawierającej P oraz l:



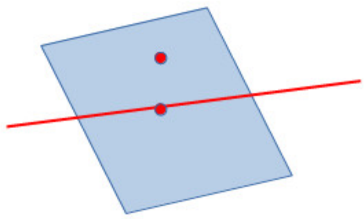
Przykład 5.4.3. Wyznacz rzut prostokątny punktu $P = (4, 5, -3)$ na płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 3 + t + s \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}.$$

Niech k będzie prostą taką, że $k \perp \pi$, $P \in k$.

$\vec{u} = [2, 0, 1] \parallel \pi, \quad \vec{v} = [1, 3, 1] \parallel \pi, \quad A = (2, 1, 3) \in \pi$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \pi, \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-3, -1, 6], \quad k \perp \pi \Rightarrow k \parallel \vec{n}$$

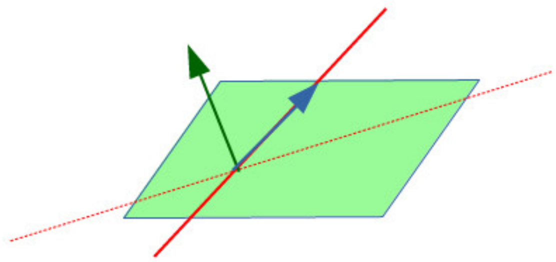


$$k:\begin{cases} x=4-3t \\ y=5-t \\ z=-3+6t \end{cases},\ t\in\mathbb{R},\quad \pi:\ -3(x-2)-(y-1)+6(z-3)=0$$

$\pi:\ 3x+y-6z+11=0\quad \{P'\}=k\cap\pi=?$

$3(4-3t)+5-t-6(-3+6t)=0 \Rightarrow t=1,\quad P'=(1,4,3)$

Definicja 5.4.4. *Kątem między płaszczyzną a prostą* nazywamy kąt o mierze $\frac{\pi}{2}-\alpha$, gdzie α to miara kąta ostrego (lub prostego, gdy prosta i płaszczyzna są równoległe) między odpowiednio zwróconym wektorem kierunkowym prostej a wektorem normalnym płaszczyzny.



Przykład 5.4.5. Wyznacz kąt między prostą $l:\begin{cases} x=2-t \\ y=1 \\ z=2+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

a płaszczyzną $\pi:\ 3x+y+z+1=0$.

Mamy $\vec{a}=[-1,0,2]\parallel l,\quad \vec{n}=[3,1,1]\perp\pi.\quad$ Oznaczmy $\beta=\measuredangle(\vec{n},\vec{a})$, $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$.
Obliczamy $\cos\beta=\frac{|\vec{n}\circ\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{|-3+0+2|}{\sqrt{9+1+1}\cdot\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{55}},\quad \alpha=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{\sqrt{55}}$,
albo $\sin\alpha=\cos\beta\Rightarrow\alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{55}}$

Odległości

Definicja 5.4.6. i) *Odległością punktu P od płaszczyzny π*, nazywamy długość odcinka PP', gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na π. Oznaczamy ją $d(P,\pi)$.

ii) *Odległością punktu P od prostej l*, nazywamy długość odcinka PP', gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na l. Oznaczamy ją $d(P,l)$.

Wzór na odległość punktu od płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz $\pi :\ Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{\mathbf{0}}$. Wówczas

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}.$$

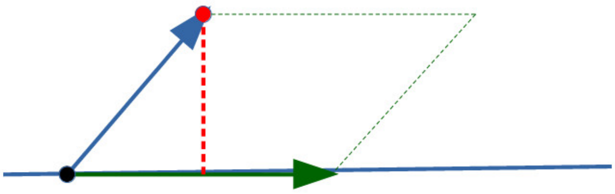
Istotnie, niech k będzie prostą taką, że $P_0 \in k$, $k \perp \pi$. Wówczas $k : \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$

$\{P_0'\} = k \cap \pi = ?$
$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0, \quad t = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$
$d(P, \pi) = |P_0P_0'| = \sqrt{(At)^2 + (Bt)^2 + (Ct)^2} = |t|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Wzór na odległość punktu od prostej

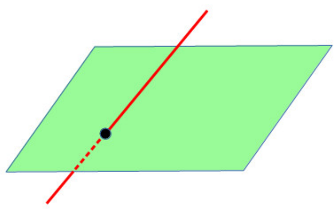
Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niech l będzie prostą przechodząca przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym $\vec{a}$. Wówczas

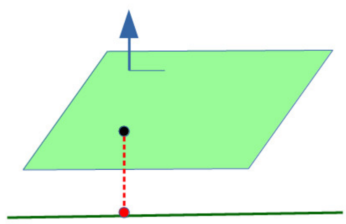
$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$



Odległość prostej od płaszczyzny

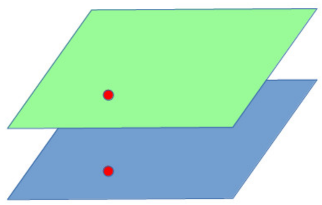
Jeśli prosta l nie przecina płaszczyzny π, to wówczas odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy odległość dowolnego punkty prostej od płaszczyzny.





Definicja 5.4.7. *Odległością dwóch płaszczyzn (prostych) równoległych* nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej.

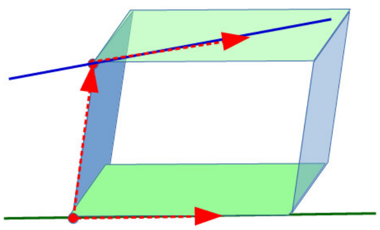
Można wykazać, że dla płaszczyzn równoległych $\pi_1 :\ Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 :\ Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $\vec{n_2} = [A, B, C] \neq \vec{\mathbf{0}}$ zachodzi wzór $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2-D_1|}{|\vec{n}|}$.



Definicja 5.4.8. *Odległością dwóch prostych skośnych* nazywamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste.

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l, przechodzącej przez punkt P_1, zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k, przechodzącej przez punkt P_2. Załóżmy że proste te są skośne. Wówczas

$$d(k,l) = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$



Symetrie

Definicja 5.4.9. Niech S będzie ustalonym punktem, l ustaloną prostą oraz π ustaloną płaszczyzną.

i) Punkt P_s jest *punktem symetrycznym* do punktu P względem punktu S, jeżeli $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP_s}$.

ii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem prostej l, jeżeli istnieje $A \in l$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp l$.

iii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem płaszczyzny π, jeżeli istnieje $A \in \pi$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp \pi$.