Przykład 4.3.12.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + 3z & = & 7 \\ 3x + 2y - 5z & = & 4 \\ 4x + 5y - 13z & = & 1 \end{array}\right.$$

$\cdot 2$ $+$

$m = n = 3$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{array}\right], \; r(A) \le 3, \; r(U) \le 3$$

$m = 3$

$r(A) = r(U) = 2$

$3 - 2 = 1$ parametr

$$U \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{y} \;\; \mathbf{x} \;\; \mathbf{z}]{k_1 \leftrightarrow k_2} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & -13 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + 5w_1]{w_2 + 2w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \\ 0 & 14 & 2 & 36 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

y x z

$7x + z = 18$

$14x + 2z = 36$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ minor niezerowy}$$

$\det \neq 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y + 2x & = & 7 - 3z \\ 7x & = & 18 - z \end{array}\right. \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3z \\ 18 - z \end{bmatrix}$$

układ nieoznaczony, rozwiązania $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{18}{7} - \frac{1}{7}z \\ y = -\frac{13}{7} + \frac{20}{7}z \\ z \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

$0 \cdot x + 0y + 0z = 0$

4.4 Metoda eliminacji Gaussa

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, gdy posiadają ten sam zbiór rozwiązań. Operacje elementarne na wierszach macierzy U, skreślenie wiersza złożonego z samych zer lub skreślenie jednego z dwu wierszy proporcjonalnych (równych) nie zmieniają rzędu macierzy U, zatem prowadzą one do równoważnego układu równań. Ewentualne przestawienie kolumn macierzy A prowadzi do zmiany kolejności występowania niewiadomych.

B nie ruszamy!

Dokonując równoważnych przekształceń układu równań $AX = B$, sprowadzamy macierz $U = [A|B]$ do postaci

minor niezerowy

operacje

I_r

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & I_r & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} & z_1 \\ & & & & \dots & & \dots \\ & & & s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} & z_r \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right].$$

Jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.
Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r = n$, układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest $x_i = z_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.
Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r < n$, układ jest nieoznaczony. Rozwiązania mają postać

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} \\ & \dots & \\ s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

parametry

Przykład 4.4.1.

koniunkcja

$m=3$

$n=4$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4 &= 1\\ x_1+x_2+x_3+3x_4 &= 2\\ 3x_1+5x_2-x_3+x_4 &= 3\end{cases}$$

$$U=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3\end{array}\right] \xrightarrow[w_3-3w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]$$

$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=-1$ sprzeczne

Równanie $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=-1$ jest sprzeczne, zatem układ jest sprzeczny.

$r(A)=2$

$r(U)=3$

Przykład 4.4.2.

$m=5$

$n=5$

$$\begin{cases} 2x+4y+9z-5t+6u &= 13\\ x+2y+4z-4t+2u &= 5\\ 3x+6y+7z-11t+2u &= 18\\ 4x+8y+19z-15t+11u &= 20\\ -\frac{1}{2}x-y+z+3t+2u &= -\frac{5}{2}\end{cases} \quad / \cdot (-2)$$

$$U=\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13\\ 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5\\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18\\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20\\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 3 & 2 & -\frac{5}{2}\end{array}\right] \xrightarrow[-2\cdot w_5]{w_2\leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13\\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18\\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20\\ 1 & 2 & -2 & -6 & -4 & 5\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4-4w_1\\ w_5-w_1}]{\substack{w_2-2w_1\\ w_3-3w_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -2 & -6 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x\,z\,t\,u\,y}]{k_2 \text{ za } k_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -5 & 1 & -4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[w_4-3w_2]{w_3+5w_2}$$

$n=5$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 16 & 6 & 0 & 18\\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & -9\end{array}\right] / \cdot (-1) \xrightarrow{(-1)\cdot w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 9\end{array}\right] \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x\ \ z\ \ u\ \ t\ \ y}]{k_3\leftrightarrow k_4}$$

$r(U)=r(A)=3$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & 9\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3\end{array}\right] \xrightarrow[w_2-2w_3]{w_1-2w_3} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 0 & -\frac{28}{3} & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3\end{array}\right]$$

2 param.

param

$$\xrightarrow{w_1-4w_2} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 11\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3\end{array}\right]$$

x z u t y

$x \quad +2y = 11$
$z \quad -7/3\, t = -3$
$u \quad +8/3\, t = 3$

równoważny układ $\begin{cases} x+2y=11\\ z-\frac{7}{3}t=-3\\ u+\frac{8}{3}t=3\end{cases}$ rozwiązania $\begin{cases} x=11-2y\\ z=-3+\frac{7}{3}t\\ u=3-\frac{8}{3}t\\ y,t\in\mathbb{R}\end{cases}$ parametry

$r(A)=r(U)=3<n=5$ układ nieoznaczony, nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $5-3=2$ parametrów

zależą od parametrów

zm. niezależne

Uwaga 4.4.3. Podział niewiadomych na zmienne zależne i parametry nie jest jednoznaczny, lecz nie jest dowolny.

Przykład 4.4.4. Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniu układu równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & s & t \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad r := r(A) = r(U) = 2,\ n = 5,\ n - r = 3 \text{ parametry}$$

Trzy zmienne spośród pięciu można wybrać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów.

gdyby wszystkie wybory były dozwolone

Nie wszystkie wybory są dozwolone.

minory niezerowe	parametry
k_1, k_3	$\{y, s, t\}$
~~k_1, k_5~~	$\{y, z, s\}$
k_2, k_3	$\{x, s, t\}$
k_2, k_5	$\{x, z, s\}$
k_4, k_3	$\{x, y, t\}$
k_4, k_5	$\{x, y, z\}$
k_3, k_5	$\{x, y, s\}$

ALE NIE JEST

7

$n = m$ $\qquad \det A \neq 0$

Uwaga 4.4.5. W przypadku gdy układ równań $AX = B$ jest układem Cramera, wykonując operacje elementarne **na wierszach** macierzy uzupełnionej $U = [A|B]$, sprowadzamy tę macierz do postaci $[I|X]$, gdzie X jest poszukiwanym rozwiązaniem układu.

$$[A|B] \xrightarrow[\textbf{na} \quad \textbf{wierszach}]{\textit{operacje} \quad \textit{elementarne}} [I|X]$$

!

Przykład 4.4.6.

$\det A \neq 0$ $\qquad r(A) = 3$

$$\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ 2x - y - z &= 0 \\ x + 3y + z &= 5 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{3}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 + w_3]{w_1 + w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot w_3]{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

układ oznaczony, jedyne rozwiązanie $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$

$1 \cdot x = 1$

$1 \cdot y = 1$

$1 \cdot z = 1$

typ układu: OZN / NIEOZN / SPRZECZ.

Przykład 4.4.7. Określ ilość rozwiązań układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2p+4)x_3 + (4p+6)x_4 = p+15 \\ (p+1)x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = p+4 \\ x_1 + 2x_2 + (p+3)x_3 + (2p+2)x_4 = 11 \end{cases}$$

Gdybyśmy chcieli $w_3 - p \cdot w_1$

$p \neq 0$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 2 & 4 & 2p+4 & 4p+6 & p+15 \\ p+1 & 2 & p+1 & p+3 & p+4 \\ 1 & 2 & p+3 & 2p+2 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-w_2 \\ w_4-w_1}]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2p & p+7 \\ p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 2 & p+1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[zmienne\ \mathbf{x_2\,x_3\,x_1\,x_4}]{k_1\ za\ k_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 2 & 0 & p+1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & -p \end{array}\right]$$

Wnioski:

schodki

1) Dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mamy $r(A) = r(U) = n = 4$, zatem układ jest oznaczony.

nic nie zakład. o p więc to układ równoważny wyjściowemu

$p=0$

2) Dla $p = 0$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

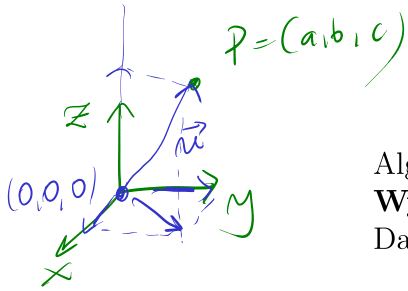
skąd otrzymujemy, że $r(A) = r(U) = 3 < n = 4$.
Zatem układ jest nieoznaczony.
Posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

3) Dla $p = 1$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$,

skąd otrzymujemy, że układ jest sprzeczny.

$\vec{OP}$ wektor zaczepiony

$\vec{a}$



$\vec{OP} = \vec{u} = [a,b,c]$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 5
Data: ....

$\vec{v} = [1,2,5]$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

TEMAT: *Geometria analityczna w* $\mathbb{R}^3$

5.1 Wektory w przestrzeni

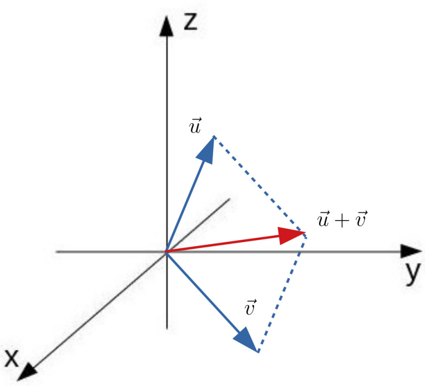
$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować jako:

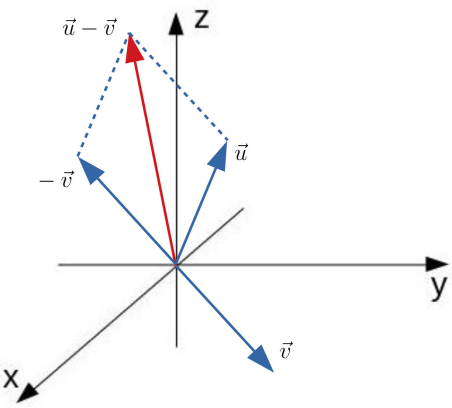
- zbiór punktów $P = (x,y,z)$, gdzie x,y,z to współrzędne punktu
- zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = [x,y,z]$, gdzie x,y,z to współrzędne wektora
- zbiór wektorów swobodnych $\vec{a}$. Wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów zaczepionych (w różnych punktach) mających ten sam zwrot, kierunek i długość.

Oznaczamy przez $\vec{\mathbf{0}} = [0,0,0]$ wektor zerowy.

Działania na wektorach
Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z]$	suma wektorów
$\lambda \cdot \vec{u} = [\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z]$	iloczyn wektora przez skalar
$-\vec{u} = [-u_x, -u_y, -u_z]$	wektor przeciwny do $\vec{u}$
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$	różnica wektorów





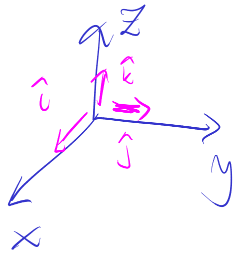
Długość wektora
Oznaczamy przez $|\vec{u}|$ długość wektora $\vec{u}$. Jeśli $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to wówczas

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \quad |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$\hat{i}\ \ \hat{j}\ \ \hat{k}$

$\hat{e}_1\ \ \hat{e}_2\ \ \hat{e}_3$

$\hat{a} = \frac{1}{5} \cdot \vec{a} = [1,0,0]$ $\vec{a} = [5,0,0]$ $|\vec{a}| = 5$



Wektor długości 1 nazywamy *wersorem*. Oznaczamy przez $\hat{\imath} = [1,0,0]$, $\hat{\jmath} = [0,1,0]$, $\hat{k} = [0,0,1]$ wersory osi układu współrzędnych. Wówczas zapis $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ oznacza $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$. Ponadto $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

warunek trójkąta

Własności długości: $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{\mathbf{0}}$, $|\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$, $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Wersorem niezerowego wektora $\vec{u}$ nazywamy wersor o tym samym kierunku i zwrocie co $\vec{u}$. Oznaczamy go $\hat{u}$. Oczywiście $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$.

$[1,2,5] = 1\cdot\hat{\imath} + 2\cdot\hat{\jmath} + 5\cdot\hat{k}$
$1[1,0,0] + 2[0,1,0] + 5[0,0,1]$

Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, to $\hat{u} = \left[\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|}\right]$ oraz

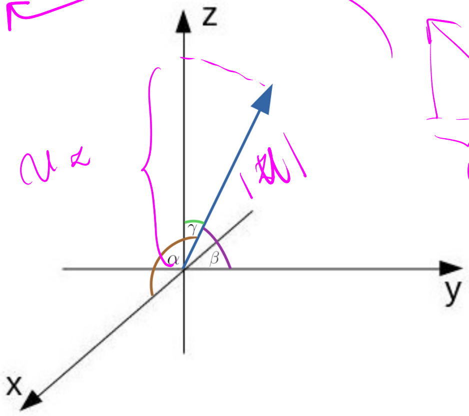
spr. czy to wersor

$$|\hat{u}| = \sqrt{\frac{u_x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{1}{|\vec{u}|^2}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1.$$

Jeśli wektor $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych kąty α, β, γ, odpowiednio, to kąty te nazywamy *kątami kierunkowymi*, zaś współrzędne wersora $\hat{u}$, czyli liczby $\cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|}$, $\cos\beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}$, $\cos\gamma = \frac{u_z}{|\vec{u}|}$ nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora $\vec{u}$.

$|u| = 1$
$\downarrow$
$u_x = \cos\alpha$
$u_y = \cos\beta$
$u_z = \cos\gamma$

Ox α
Oy β
Oz γ



Iloczyn skalarny

Oznaczamy przez $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ kąt między wektorami $\vec{u}, \vec{v}$,.
Przyjmujemy, że jego miara należy do przedziału $[0, \pi]$.

ten

Definicja 5.1.1. *Iloczynem skalarnym* dwóch niezerowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy liczbę $\vec{u} \circ \vec{v} :=$ $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$. Oznaczamy ją symbolem $\vec{u} \circ \vec{v}$. Gdy jeden z wektorów jest zerowy, przyjmujemy, że iloczyn jest równy 0.

Twierdzenie 5.1.2. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas $\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

$= |u| \cdot |v| \cdot \cos\measuredangle(u,v)$

Przykład 5.1.3. $[1,4,0] \circ [2,-1,1] = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -2 < 0$
Cosinus kąta między wektorami jest ujemny, zatem kąt jest rozwarty.

$\cos\measuredangle(u,v) < 0$

> 0 tylko to może wpłynąć na znak

Twierdzenie 5.1.4 (Własności iloczynu skalarnego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$ <— z def.

ii) $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$ $\quad \vec{u} = [u_x, u_y, u_z] \quad \vec{u} \circ \vec{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$

iii) $(\lambda \vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v})$

iv) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$ rozdzielność wzgl. +

v) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

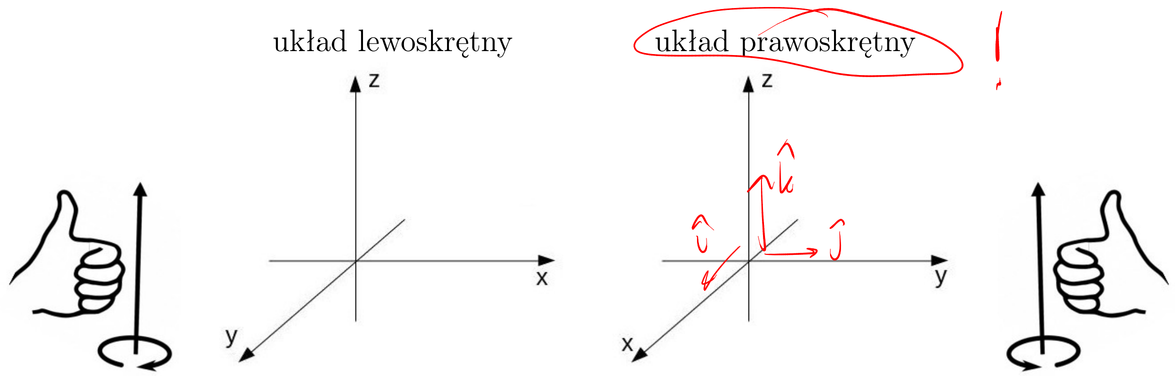
vi) $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, $\boxed{\vec{u} \circ \vec{v} = 0} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ $\quad \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$\vec{u} = 0 \vee \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0$

Dowód. Wynika wprost z definicji. □

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ - trójka wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w jednym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych.



Definicja 5.1.5. Uporządkowana trójka wektorów $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ma *orientację zgodną* z orientacją układu współrzędnych, jeśli

$$\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0.$$

przyda się

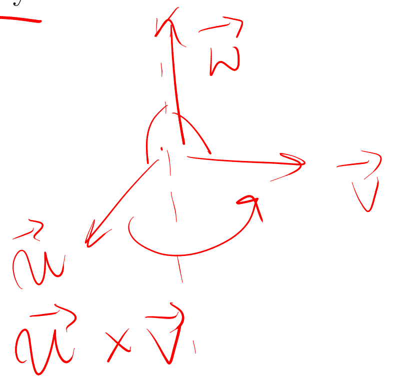
Iloczyn wektorowy

Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy *współliniowymi* lub *kolinearnymi*, gdy istnieje prosta, w której zawate są te wektory. Piszemy wówczas $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Definicja 5.1.6. *Iloczynem wektorowym* uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$ taki, że: $\quad \vec{u} \times \vec{v}$

kierunek i) $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$,

długość ii) $|\vec{w}| = \underbrace{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\angle(\vec{u}, \vec{v})}_{\text{liczba}}$,

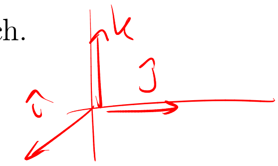


$\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi]$

$\sin\alpha \geq 0$

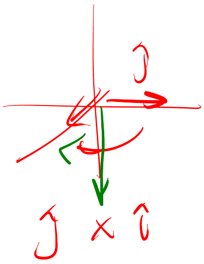
kierunek

iii) orientacja trójki $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.



Wektor $\vec{w}$ oznaczamy symbolem $\vec{u} \times \vec{v}$.
Jeśli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to przyjmujemy $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Przykład 5.1.7. $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \quad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}, \quad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}, \quad \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}, \quad \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$



Twierdzenie 5.1.8. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

reguła mnemotechniczna

$$\hat{\imath}\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

liczba liczba liczba

Przykład 5.1.9. Niech $\vec{u} = [1, 2, -3]$, $\vec{v} = [3, 4, 5]$. Korzystamy z twierdzenia Laplace'a

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}_{22} - \hat{\jmath}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}_{14} + \hat{k}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}_{-2} = [22, -14, -2]$$

lub metody Sarrusa

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10\hat{\imath} + 4\hat{k} - 9\hat{\jmath} - 6\hat{k} + 12\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} = 22\hat{\imath} - 14\hat{\jmath} - 2\hat{k}.$$

Twierdzenie 5.1.10 (Własności iloczynu wektorowego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

reguła prawej dłoni

i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
ii) $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$
iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
iv) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
v) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
vi) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0}\right)$

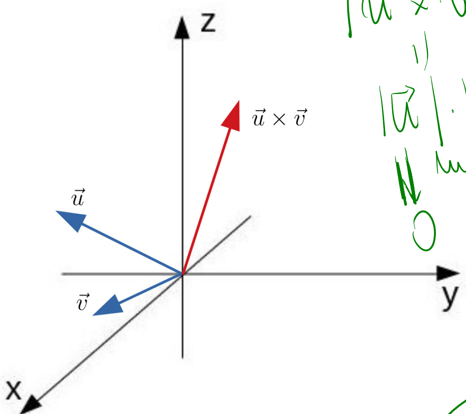
iii) iv) rozdzielność
↓
w dwie strony

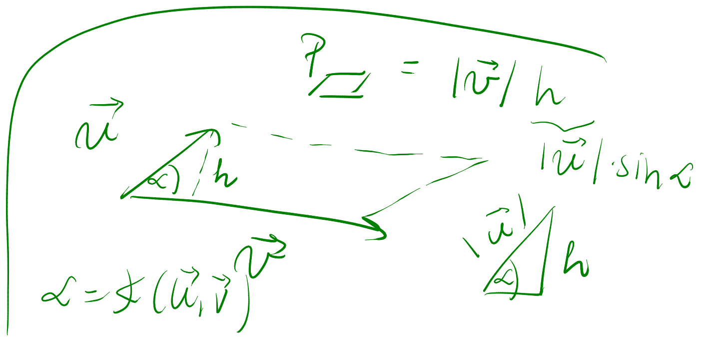
$\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$
$\|$
$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$
$\Updownarrow$ lub $\Updownarrow$ lub $\Updownarrow$
$0 \quad 0 \quad 0$

$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$

Reguła prawej dłoni:





Uwaga 5.1.11. Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}$ równe jest $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Iloczyn mieszany

Definicja 5.1.12. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. *Iloczynem mieszanym* uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy liczbę $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$. Oznaczamy ją symbolem $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

ciąg 3 elementów

Twierdzenie 5.1.13. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Wówczas

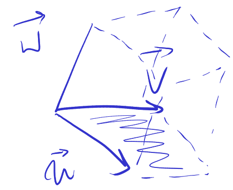
$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}}.$$

$$(\underbrace{\vec{u} \times \vec{v}}_{\text{wektor}}) \circ \vec{w} \quad \text{skalar}$$

Dowód.
$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = w_x \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} =$$

tw. Laplace'a

$$= [w_x, w_y, w_z] \circ \left[\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right] = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v}) \qquad \square$$



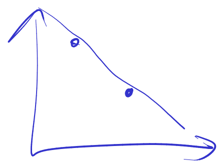
Uwaga 5.1.14. Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ równa jest $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

moduł → wynik $\in \mathbb{R}$

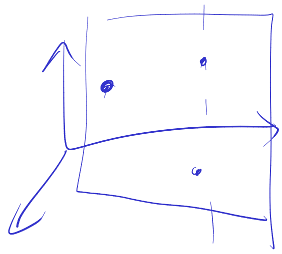
Dowód. Niech $\alpha = \measuredangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$. Ponieważ $V = P_p \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h$ oraz $\cos \alpha = \frac{h}{|\vec{w}|}$, zatem $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \alpha = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$. $\square$

Przykład 5.1.15. Czy punkty $A = (1, 0, 2)$, $B = (5, 1, 5)$, $C = (3, -1, 2)$, $D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie?

Punkty leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy objętość czworościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ jest równa zero.



$\mathbb{R}^2$



$\overrightarrow{AB} = [4, 1, 3]$, $\overrightarrow{AC} = [2, -1, 0]$, $\overrightarrow{AD} = [0, 3, 3]$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 18 - 6 = 0$$

Punkty są współpłaszczyznowe (komplanarne).

Twierdzenie 5.1.16 (Własności iloczynu mieszanego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ prawdziwe są następujące równości.

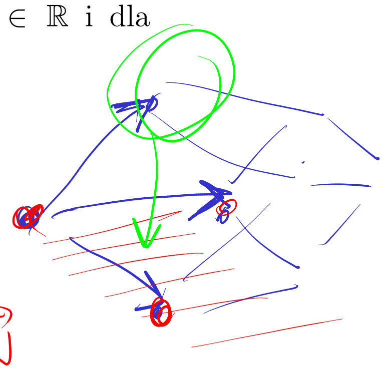
$(u \times \vec{v}) \circ w$ $\quad -(\vec{v} \times \vec{u}) \circ \vec{w}$

i) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$

ii) $\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w})$

iii) $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}) = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}) + (\vec{v}, \vec{w}, \vec{a})$

iv) $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$

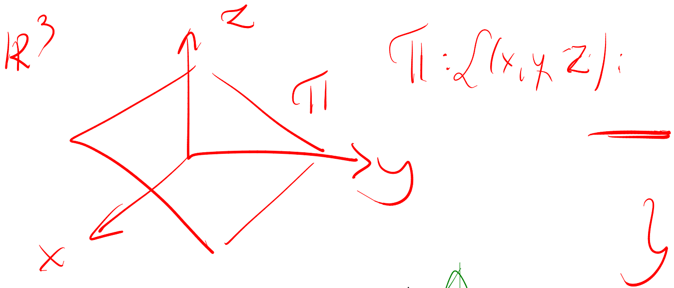


$(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$(\vec{v} \times \vec{w}) \circ \vec{u} = \vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w})$

5.2 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

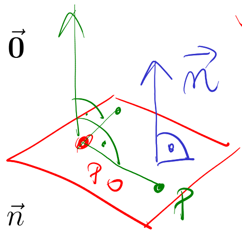


Równanie ogólne i normalne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{\mathbf{0}}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}\}$$

jest płaszczyzną przechodząca przez punkt P_0 i prostopadłą do wektora $\vec{n}$. Wektor $\vec{n}$ nazywamy *wektorem normalnym* płaszczyzny π.



$\vec{n} \perp \Pi$

$= [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$

$$P \in \pi \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$P \in \Pi$?

Równanie normalne: $\quad \pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Równanie ogólne: $\quad \pi : Ax + By + Cz + D = 0, \; D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

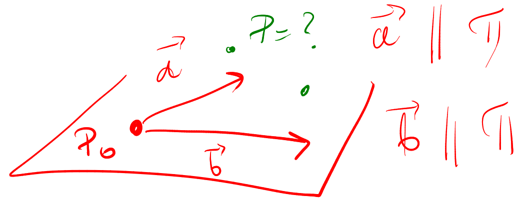
Przykład 5.2.1. $P_0 = (1, 2, 5), \vec{n} = [1, -1, 3]$, $P_0 \in \pi$, $\vec{n} \perp \pi$, $\pi = ?$

x_0, y_0, z_0 znam

$P \in \Pi$: $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$ $\quad \overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n} = 0$

$\pi : 1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 5) = 0$ równanie normalne

$\pi : x - y + 3z - 14 = 0$ równanie ogólne

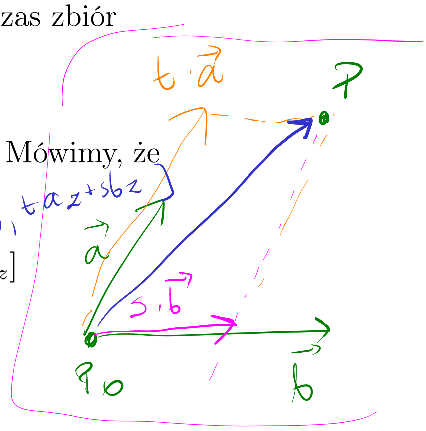


Równanie parametryczne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z] \neq \vec{\mathbf{0}}$ ustalonymi wektorami niewspółliniowymi, tj. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \exists t, s \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b}\}$$

jest płaszczyzną przechodząca przez punkt P_0 i równoległą do wektorów $\vec{a}, \vec{b}$. Mówimy, że wektory $\vec{a}, \vec{b}$ są *wektorami rozpinającymi* płaszczyznę π.



$t\vec{a} + s\vec{b}$

$[t a_x + s b_x, t a_y + s b_y, t a_z + s b_z]$

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t[a_x, a_y, a_z] + s[b_x, b_y, b_z]$$

Równanie parametryczne: $\quad \pi : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x + s \cdot b_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y + s \cdot b_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z + s \cdot b_z \end{cases}, \; t, s \in \mathbb{R}$

Przykład 5.2.2. Napisz równanie parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 4)$, $B = (2, 5, 4)$ i równoległej do osi Oy.

$$\overrightarrow{AB} = [1, 4, 0] \parallel \pi, \quad \hat{j} = [0, 1, 0] \parallel Oy \Rightarrow \hat{j} \parallel \pi, \quad A \in \pi$$

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot s & = 1 + t \\ y = 1 + 4 \cdot t + 1 \cdot s & = 1 + 4t + s \\ z = 4 + 0 \cdot t + 0 \cdot s & = 4 \end{cases}, \; t, s \in \mathbb{R}$$

A