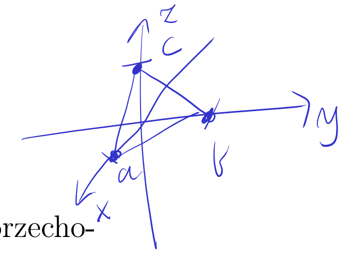
Przykład 5.2.2. Napisz równanie parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 4)$, $B = (2, 5, 4)$ i równoległej do osi Oy.

$$\overrightarrow{AB} = [1, 4, 0] \parallel \pi, \quad \hat{j} = [0, 1, 0] \parallel Oy \Rightarrow \hat{j} \parallel \pi, \quad A \in \pi$$

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot s & = 1 + t \\ y = 1 + 4 \cdot t + 1 \cdot s & = 1 + 4t + s \\ z = 4 + 0 \cdot t + 0 \cdot s & = 4 \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$



Inne równania płaszczyzny

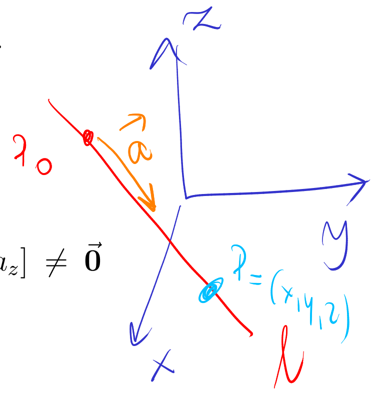
Równanie postaci $\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, *gdzie* $a, b, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, opisuje płaszczyznę przechodząca przez punkty $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$. Jest to tzw. *równanie odcinkowe* płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ma postać

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, ponieważ $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1] \parallel \pi$ oraz $\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \perp \pi$, zatem
$\pi = \{P = (x, y, z) : \overrightarrow{P_1P} \perp \vec{n}\} = \{P = (x, y, z) : [x - x_1, y - y_1, z - z_1] \circ \vec{n} = 0\}$.

5.3 Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$



Równanie parametryczne i kierunkowe prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$P \in l$?

$$l = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a}\}$$

jest prostą przechodząca przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\vec{a}$. Wektor $\vec{a}$ nazywamy *wektorem kierunkowym* prostej l.

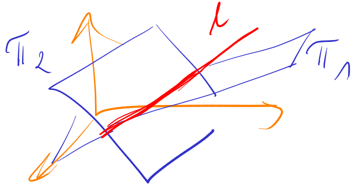
$[x-x_0, y-y_0, z-z_0] = [ta_x, ta_y, ta_z]$

$$P_0 \in l \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} \ : \ \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$

Równanie postaci $l : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ nazywamy *równaniem parametrycznym* prostej l.

Rugując z każdego z powyższych równań parametr t, otrzymujemy równanie postaci l : $t = \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$, które nazywamy *równaniem kierunkowym* prostej l.

kierunek



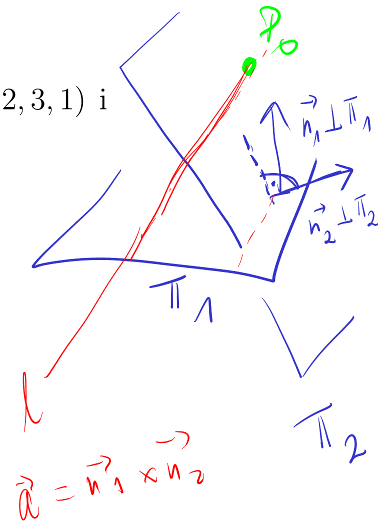
Równanie krawędziowe prostej

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, gdzie $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ będą dwiema nierównoległymi płaszczyznami. Ich częścią wspólną jest prosta $\boxed{l = \pi_1 \cap \pi_2}$.

$$P \in l \quad \Leftrightarrow \quad (P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2)$$

Równanie krawędziowe: $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

Przykład 5.3.1. Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 3, 1)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$.



$P_0 \in \Pi_1$?

Oznaczmy $\vec{n_1} = [6, -1, 1] \perp \pi_1$, $\vec{n_2} = [1, 3, -2] \perp \pi_2$ oraz $\vec{a} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} \parallel l$.

$2+3\cdot 3-2\cdot 1+1 = \ \neq 0$ NIE

$= 2+9-2+1$

Wówczas $\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = [-1, 13, 19]$ oraz $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 13t \\ z = 1 + 19t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

punkt

$t\vec{a}$

5.4 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

Wzajemne położenie płaszczyzn

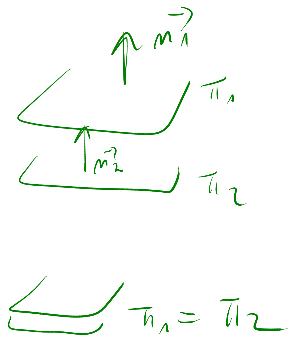
Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n_1} = [A_1, B_1, C_1] \neq \vec{\mathbf{0}}$,
$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n_2} = [A_2, B_2, C_2] \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Szukanie punktów wspólnych π_1 oraz π_2 polega na rozwiązaniu układu równań

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 \\ -D_2 \end{bmatrix}.$$

Niech $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{bmatrix}$.

$r(A) = 1$



$\Pi_1 \parallel \Pi_2$

Płaszczyzny mogą być równoległe. $\quad \pi_1 \| \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \| \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{\mathbf{0}}$

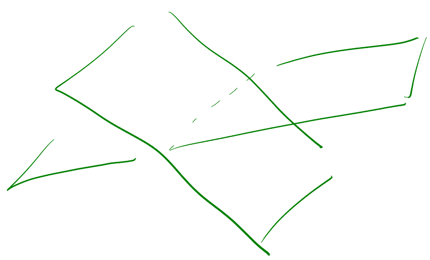
Wówczas albo $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = r(A) = 1$

albo $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = 2$, $r(A) = 1$.

2 środki

Gdy $r(U) = r(A) = 2$, płaszczyzny $\pi_1 \nparallel \pi_2$ przecinają się wzdłuż prostej.
W szczególności mogą być prostopadłe.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} \circ \vec{n_2} = 0$$

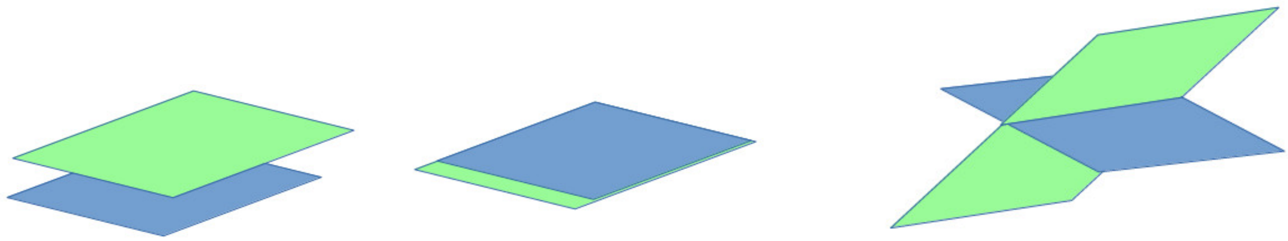


$r(A) = 2$

$\vec{n}_1 \neq \alpha \cdot \vec{n}_2$

$\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$

$\Pi_1 \nparallel \Pi_2$

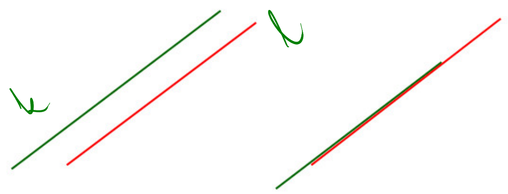


Wzajemne położenie prostych

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l, przechodzącej przez punkt P_1, zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k, przechodzącej przez punkt P_2.

Proste mogą być równoległe. $\quad l \parallel k \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{\mathbf{0}}$.
Wówczas albo $l = k$, albo $l \cap k = \varnothing$.

albo $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$



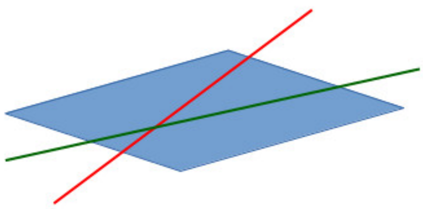
$\vec{a} \parallel \vec{b}$ a $P_1 \in l$ ale $P_1 \notin k$ $\quad l \cap k \neq \emptyset$

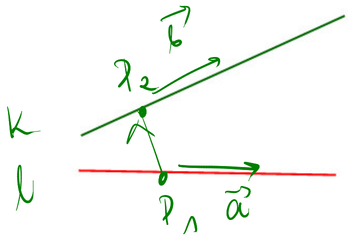
Gdy $l \nparallel k$, możliwe są dwie sytuacje.

1) Proste l i k leżą w jednej płaszczyźnie, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas l i k mają jeden punkt wspólny tj. $l \cap k = \{P\}$,

2) Proste l i k nie leżą w jednej płaszczyźnie (tzw. *proste skośne*), co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas $l \cap k = \varnothing$.

Zatem proste l i k są skośne wtedy i tylko wtedy gdy $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}\right) \neq 0$. iloczyn mieszany





skośne

$h \neq 0$

$Obj \neq 0$

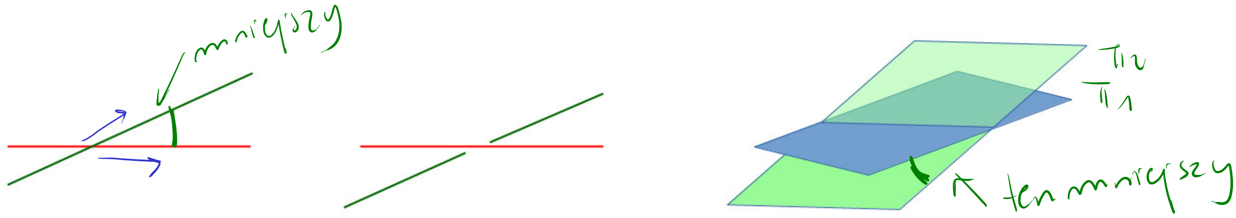
Kąty

Definicja 5.4.1. i) *Kątem między dwiema prostymi* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy proste są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami kierunkowymi tychże prostych.

ii) *Kątem między dwiema płaszczyznami* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy płaszczyzny są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami normalnymi tychże

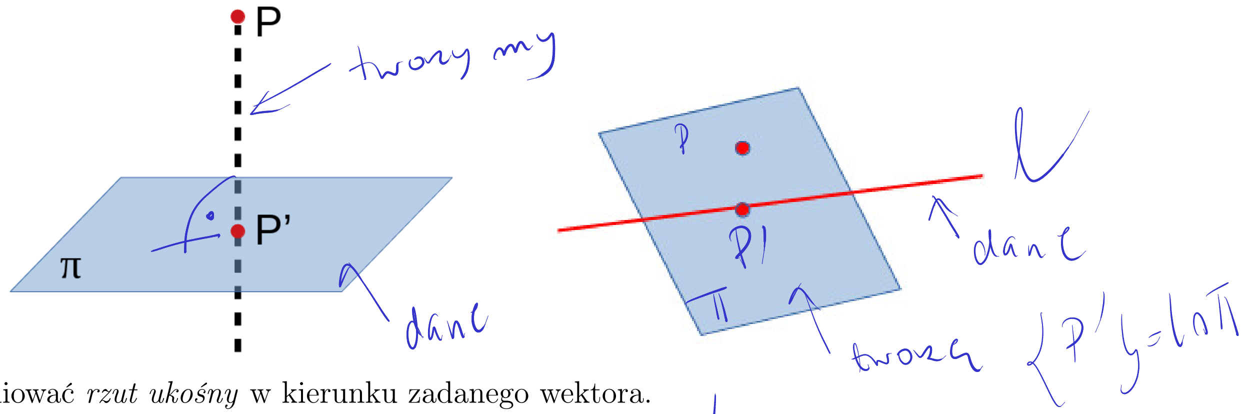
$\measuredangle(\pi_1, \pi_2) = \measuredangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$

płaszczyzn.



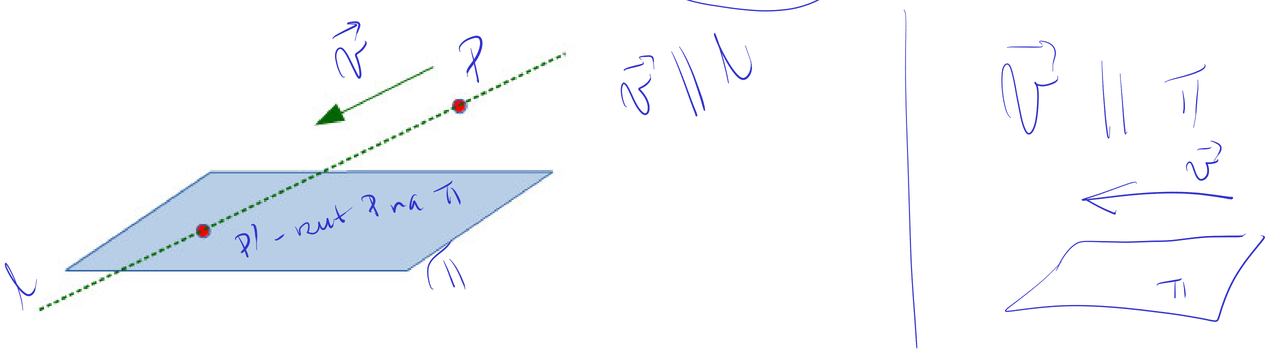
Definicja 5.4.2. i) *Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π* nazywamy punkt $P' \in \pi$ taki, że $PP' \perp \pi$.

ii) *Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l* nazywamy punkt $P' \in l$ taki, że $PP' \perp l$.

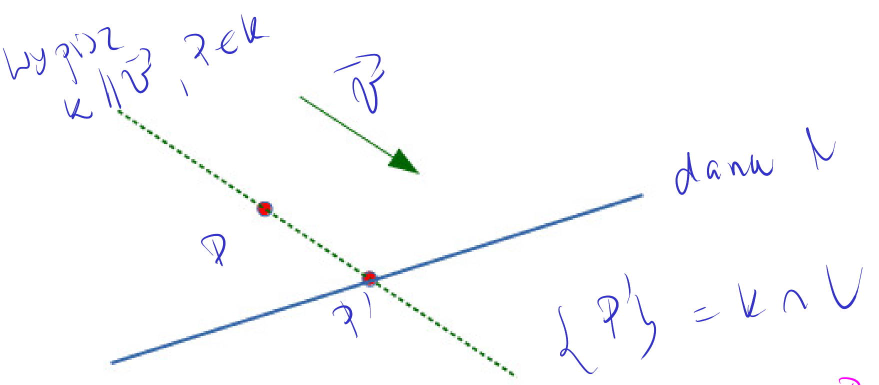


Można zdefiniować *rzut ukośny* w kierunku zadanego wektora.

Rzut punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora $\vec{v} \nparallel \pi$: !

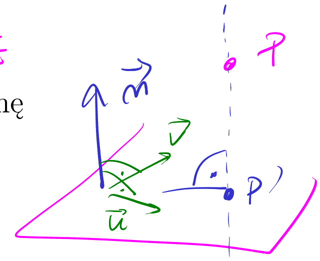


Rzut punktu P na prostą l w kierunku wektora $\vec{v}$, o którym zakładamy, że należy do płaszczyzny zawierającej P oraz l:



gdy l i v słosne taki rzut nie istnieje

$P \in \pi$? NIE



Przykład 5.4.3. Wyznacz rzut prostokątny punktu $P = (4, 5, -3)$ na płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 3 + t + s \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}.$$

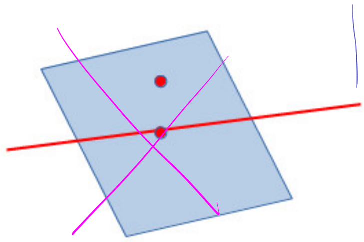
ozn. P'

Niech k będzie prostą taką, że $k \perp \pi$, $P \in k$.

$k \parallel \vec{n}$

$\vec{u} = [2, 0, 1] \parallel \pi, \quad \vec{v} = [1, 3, 1] \parallel \pi, \quad A = (2, 1, 3) \in \pi$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \pi, \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-3, -1, 6], \quad k \perp \pi \Rightarrow k \parallel \vec{n}$$



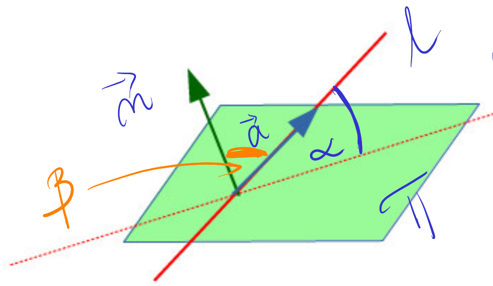
punkt $\quad \vec{n} \parallel k$

$$k : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 5 - t \\ z = -3 + 6t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \quad \pi : -3(x - 2) - (y - 1) + 6(z - 3) = 0$$

$\pi : 3x + y - 6z + 11 = 0 \quad \{P'\} = k \cap \pi = ?$

$3(4 - 3t) + 5 - t - 6(-3 + 6t) = 0 \Rightarrow t = 1, \quad P' = (1, 4, 3)$ $\quad t = 1$

Definicja 5.4.4. *Kątem między płaszczyzną a prostą* nazywamy kąt o mierze $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to miara kąta ostrego (lub prostego, gdy prosta i płaszczyzna są równoległe) między odpowiednio zwróconym wektorem kierunkowym prostej a wektorem normalnym płaszczyzny.



l' - rzut prostokątny l na π

$\alpha = \measuredangle(l, \pi) = ? = \measuredangle(l, l')$

$\vec{a} \parallel l$

$\vec{n} \perp \pi$

$\alpha = ?$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

znajdę β!

Przykład 5.4.5. Wyznacz kąt między prostą $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

a płaszczyzną $\pi : \ 3x + y + z + 1 = 0.$

$\vec{a} \circ \vec{n} = |\vec{a}||\vec{n}|\cos\beta$

Mamy $\vec{a} = [-1,0,2] \parallel l$, $\vec{n} = [3,1,1] \perp \pi$. Oznaczmy $\beta = \measuredangle(\vec{n},\vec{a})$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.
Obliczamy $\cos\beta = \frac{|\vec{n}\circ\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|} = \frac{|-3+0+2|}{\sqrt{9+1+1}\cdot\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{\sqrt{55}}$,
albo $\sin\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{55}}$

$\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$

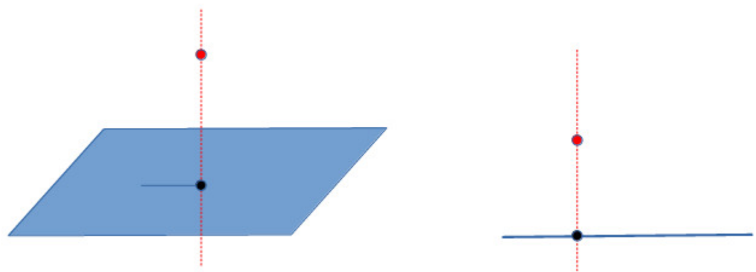
żeby wybrać kąt ostry

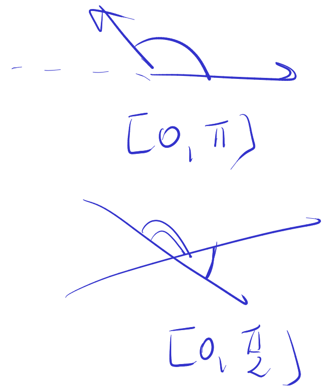
$\cos\beta = \frac{|\vec{n}\circ\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}$

Odległości

Definicja 5.4.6. i) *Odległością punktu P od płaszczyzny π*, nazywamy długość odcinka PP', gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na π. Oznaczamy ją $d(P,\pi)$.

ii) *Odległością punktu P od prostej l*, nazywamy długość odcinka PP', gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na l. Oznaczamy ją $d(P,l)$.

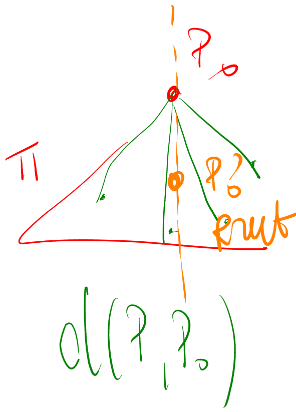




Wzór na odległość punktu od płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ oraz $\pi: \ Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{n} = [A,B,C] \neq \vec{\mathbf{0}}$. Wówczas

$$d(P_0,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|\vec{n}|}.$$



dowód

Istotnie, niech k będzie prostą taką, że $P_0 \in k$, $k \perp \pi$. Wówczas $k: \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$

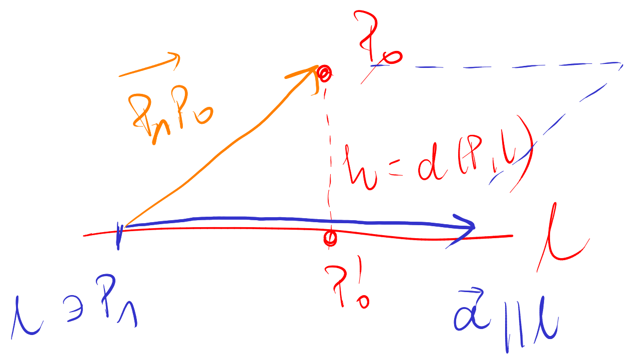
$\{P_0'\} = k \cap \pi = ?$
$A(x_0+At) + B(y_0+Bt) + C(z_0+Ct) + D = 0$, $\quad t = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$
$d(P,\pi) = |P_0P_0'| = \sqrt{(At)^2+(Bt)^2+(Ct)^2} = |t|\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

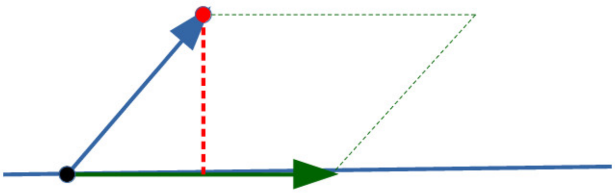
Wzór na odległość punktu od prostej

Niech $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ oraz niech l będzie prostą przechodząca przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym $\vec{a}$. Wówczas

$$d(P_0,l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

$\frac{P_{\text{ole}} \ \square}{\text{dł. podstawy}}$





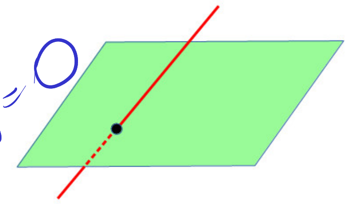
Odległość prostej od płaszczyzny

minimum dla $|P_1 P_2|$, $P_1 \in l$, $P_2 \in \pi$

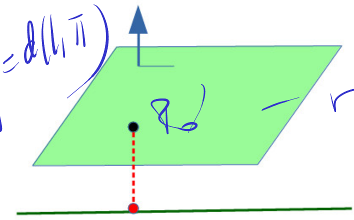
Jeśli prosta l nie przecina płaszczyzny π, to wówczas odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy odległość dowolnego punkty prostej od płaszczyzny.

$\pi \cap l$

$d(\pi, l) = 0$



$|P_0 P_0'| = d(l, \pi)$



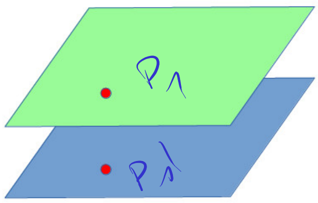
P_0' – rzut P_0 na π

l $\quad P_0 \in l$

P_0

Definicja 5.4.7. *Odległością dwóch płaszczyzn (prostych) równoległych* nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej.

Można wykazać, że dla płaszczyzn równoległych $\pi_1 : \; Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : \; Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $\vec{n_2} = [A, B, C] \neq \vec{\mathbf{0}}$ zachodzi wzór $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{|\vec{n}|}$.



π_1 $\quad P_1 \in \pi_1$ $\quad P_1'$ → rzut prostokątny na π_2

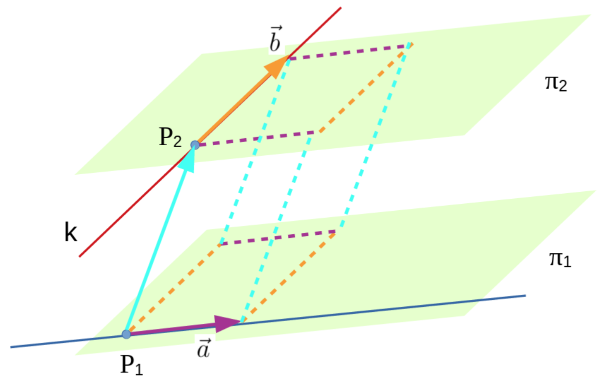
$|P_1 P_1'|$

Odległość prostych skośnych

Przypomnijmy, że jeśli dwie proste leżą w jednej płaszczyźnie, to przecinają się lub są równoległe. Proste, które nie są do siebie równolegle i nie mają punktów wspólnych nazywamy skośnymi. Zatem proste są skośne, gdy nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l, przechodzącej przez punkt P_1, zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k, przechodzącej przez punkt P_2.

Załóżmy że proste te są skośne. Wówczas istnieją płaszczyzna π_1 zawierającą prostą l oraz płaszczyzna π_2 zawierająca prostą k takie, że $\pi_1 \parallel \pi_2$ oraz $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$. Ponadto płaszczyzny równoległe, na których leżą dane dwie proste skośne są wyznaczone jednoznacznie. Istotnie, π_1 jest płaszczyzną zawierającą l i równoległą do wektora $\vec{b}$. Jej wektorem normalnym jest wektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Podobnie, π_2 jest płaszczyzną zawierającą k i równoległą do wektora $\vec{a}$. Jej wektorem normalnym również jest wektor $\vec{a} \times \vec{b}$.



Definicja 5.4.8. *Odległością dwóch prostych skośnych* nazywamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste.

Uwaga 5.4.9. Niech l i k będą jak wyżej. Załóżmy że proste te są skośne, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas

$$d(k,l) = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Objętość
Pole podstawy

Przykładowe zadanie polegające na wyznaczaniu odległości dwóch prostych skośnych można znaleźć tutaj.

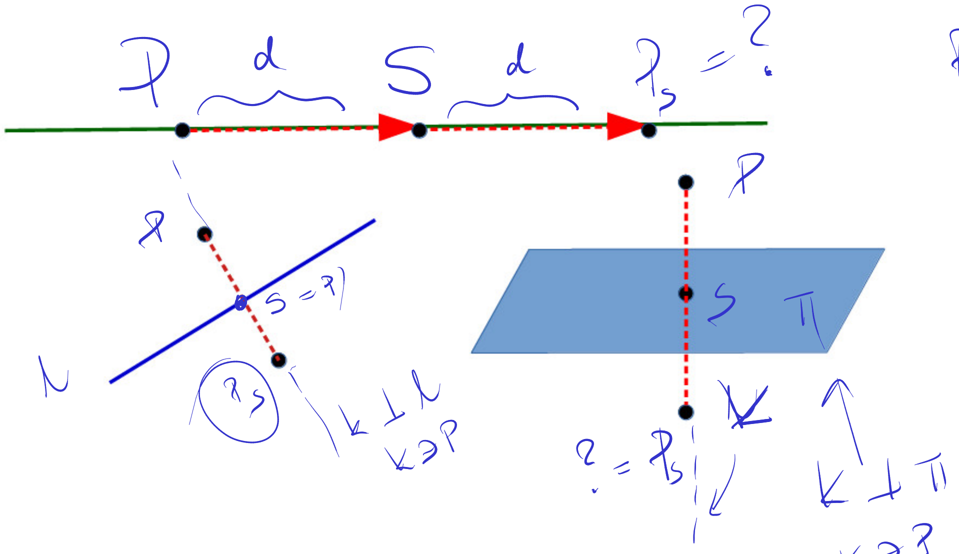
Symetrie

Definicja 5.4.10. Niech S będzie ustalonym punktem, l ustaloną prostą oraz π ustaloną płaszczyzną.

i) Punkt P_s jest *punktem symetrycznym* do punktu P względem punktu S, jeżeli $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP_s}$.

ii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem prostej l, jeżeli istnieje $A \in l$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp l$.

iii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem płaszczyzny π, jeżeli istnieje $A \in \pi$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp \pi$.



$P_S = T_{\vec{PS}}(S)$

translacja punktu S o wektor $\vec{PS}$

$S = P'$ – rzut P na Π

~~MOTYWACJA~~

$\vec{u} \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\cup$

$\vec{v} = [a, b, c]$ wektory

$\alpha \in \mathbb{R}$ skalar

$\alpha \cdot \vec{v}$

$\vec{u} + \vec{v}$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

TEMAT: *Przestrzenie liniowe*

6.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie

Niech $K = (K, +, \cdot)$ będzie ciałem, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, zaś $V \neq \varnothing$ zbiorem. Niech dane będzie działanie wewnętrzne $\oplus : V \times V \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in V$ oraz działanie zewnętrzne $\odot : K \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in V$.

Definicja 6.1.1. Zespół $V = (V, \oplus, K, \odot)$ taki, że

i) $(V, \oplus)$ jest grupą abelową,

suma wektorów

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$

rozdzielność

iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

suma skalarów

iv) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$

MIESZANA ŁĄCZNOŚĆ

iloczyn skalarów — iloczyn " skalar razy wektor "

v) $\forall v \in V \quad 1 \odot v = v$

1 w ciele

nazywamy *przestrzenią wektorową* bądź *przestrzenią liniową* nad ciałem K (albo przestrzenią K-liniową). Elementy zbioru V nazywamy *wektorami*, zaś elementy ciała K *skalarami*.

Przykład 6.1.2. Poniższe struktury są przestrzeniami wektorowymi.

i) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \oplus, \mathbb{R}, \odot)$
Dla $u = [u_1, \ldots, u_n], v = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
$u \oplus v = [u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n]$, $\alpha \odot u = [\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n]$.

→ u nas $n=3$ $\mathbb{R}^3$ geometria

ii) $(K^n, \oplus, K, \odot)$, gdzie $K = (K, +, \cdot)$ to dowolne ciało
Dla $u = [u_1, \ldots, u_n], v = [v_1, \ldots, v_n] \in K^n$ oraz $\alpha \in K$ definiujemy
$u \oplus v = [u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n]$, $\alpha \odot u = [\alpha \cdot u_1, \ldots, \alpha \cdot u_n]$.

$(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot)$

iii) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
Dla $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
$f_3 = f_1 \oplus f_2$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R}\ f_3(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$
oraz $f_4 = \alpha \odot f_1$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R}\ f_4(x) = (\alpha \odot f_1)(x) := \alpha \cdot f_1(x)$
Elementem neutralnym działania $\oplus$ jest funkcja stale równa zero.

iv) $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = (M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie działania $+, \cdot$ to działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę.

ustalonego wymiaru

NOTACJA
A, B - zbiory
$B^A = \{f : A \to B\}$

standardowe oznaczenie

v) $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}[x]$ to zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę.

Uwaga 6.1.3. Często tym samym symbolem oznaczamy działania w ciele $K = (K, +, \cdot)$ i działania w przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$.

Wówczas dla $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in K$

$u + v$	suma wektorów
$\alpha + \beta$	suma skalarów
$\alpha \cdot u$	iloczyn wektora przez skalar
$\alpha \cdot \beta$	iloczyn skalarów

Twierdzenie 6.1.4. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niech $\mathbf{0}$ oznacza element neutralny dodawania w V, zaś $0, 1$ elementy neutralne działań w ciele K. Wówczas:

i) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad 0 \cdot v = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee v = \mathbf{0})$

iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$

iv) $\forall v \in V \quad -1 \cdot v = -v$

v) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$

vi) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (u - v) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$

$0 \quad \mathbf{0} \quad 0_V$

$(V, \oplus)$ grupa

$\forall a \ \exists$ el. przeciwny (el. symetr.)

$a - b = a + (-b)$

Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K = (K, +, \cdot)$ i niech $U \subset V$ będzie niepustym podzbiorem zbioru V.

Definicja 6.1.5. Jeśli zbiór U wraz z działaniami $\oplus|_{U\times U} : U \times U \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in U$, $\odot|_{K\times U} : K \times U \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in U$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K, to $U = (U, \oplus|_{U\times U}, K, \odot|_{K\times U})$ nazywamy *podprzestrzenią wektorową* lub *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V.

NOTACJA

$f(x) = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$

$g = f|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

$g(x) = \sin x$

$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Twierdzenie 6.1.6. Jeśli $V = (V, \oplus, K, \odot)$ jest przestrzenią wektorową oraz $\varnothing \neq U \subset V$, to wówczas U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U$$

lub ~~równoważnie~~

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \odot u_1) \oplus (\beta \odot u_2) \in U.$$

Dowód. Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Implikacja w druga stronę wynika z faktu, że U jest podgrupą grupy V. $\square$

$V \qquad V \supseteq V \qquad V \supset \{0_V\}$

Uwaga 6.1.7. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową. Wówczas $U = \{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią liniową. Nazywamy ją *podprzestrzenią trywialną*. Podobnie $U = V$ jest podprzestrzenią liniową V. Podprzestrzenie te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi*.

$U \subset V$

Uwaga 6.1.8. Każda podprzestrzeń liniowa zawiera wektor zerowy.

U - podprz.

Dowód. Jeśli U jest podprzestrzenią liniową, to $\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \ \wedge$ $\alpha \odot u_1 \in U$. W szczególności $-1 \odot u_1 = -u_1 \in U$ oraz $u_1 \oplus (-u_1) = \mathbf{0} \in U$. $\square$

Wniosek 6.1.9. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową, zaś $U \subset V$ podzbiorem V. Jeśli $\mathbf{0} \notin U$, to U nie jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

Przykład 6.1.10. $= \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$

i) $V = (\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

ANALIZA

U jest podprzestrzenią liniową V, bowiem suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą oraz iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę jest funkcja ciągłą.

ii) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \ - \ \textit{parzysty}\}$

U **nie** jest podprzestrzenią liniową V. Niech $f(x) = x^4 + x^3$ oraz $g(x) = -x^4$. Wówczas $(f+g)(x) = x^3$. Zatem $f, g \in U$, ale $f + g \notin U$.

STOP

iii) $V = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ 2x + z - 3t = 0 \wedge y = 0\}$

U jest podprzestrzenią liniową V. Skoro $z = 3t - 2x$ oraz $y = 0$, zatem dowolny element $u \in U$ jest postaci $u = (x, 0, 3t - 2x, t)$. Weźmy $u_1 = (x_1, 0, 3t_1 - 2x_1, t_1) \in U$, $u_2 = (x_2, 0, 3t_2 - 2x_2, t_2) \in U$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, wówczas
$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, 0, 3(t_1 + t_2) - 2(x_1 + x_2), t_1 + t_2) \in U$
oraz $\alpha u_1 = (\alpha x_1, 0, \alpha(3t_1 - 2x_1), \alpha t_1) = (\alpha x_1, 0, 3\alpha t_1 - 2\alpha x_1, \alpha t_1) \in U$

iv) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \mathbb{R}_n[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] : \ \deg p \leq n\}$.
Przyjmujemy, że $\deg \mathbf{0} = -\infty$. Wówczas U jest podprzestrzenią liniową V.

Podprzestrzenie wektorowe $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Jedynymi nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^2$ są proste przechodzące przez $(0, 0)$.
Jedynymi nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^3$ są płaszczyzny i proste przechodzące przez $(0, 0, 0)$.