**Przykład 6.2.33.** $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$\mathcal{B}_k^2 = (e_1, e_2))$, gdzie $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ to baza kanoniczna.

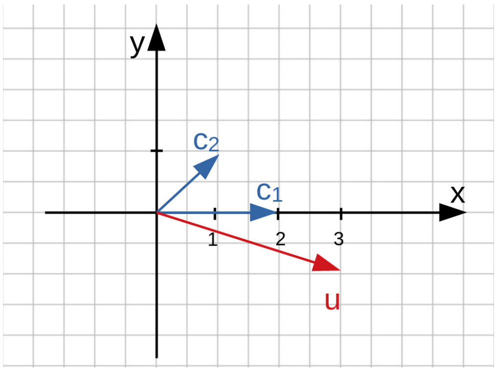
$\mathcal{C} = (c_1, c_2))$, gdzie $c_1 = (2,0), c_2 = (1,1)$ to inna baza $\mathbb{R}^2$.

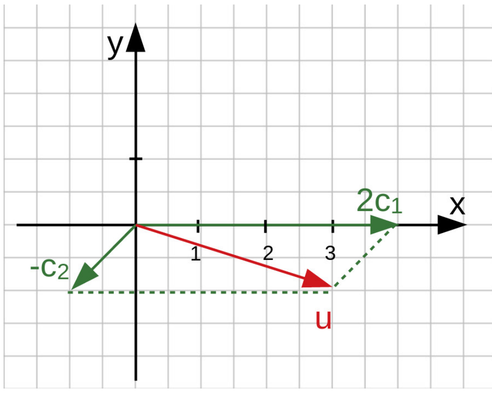
standardowe

dim $\mathbb{R}^2 = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \{c_1, c_2\}$ lin. niezal. $\xrightarrow{\text{Tw}}$ BAZA

$u = [2, -1]_{\mathcal{C}} = 2c_1 - c_2 = 2 \cdot (2,0) - (1,1) = (3, -1)$




**Przykład 6.2.34.** $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$\mathcal{B}_k^2 = (e_1, e_2))$, gdzie $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ to baza kanoniczna.

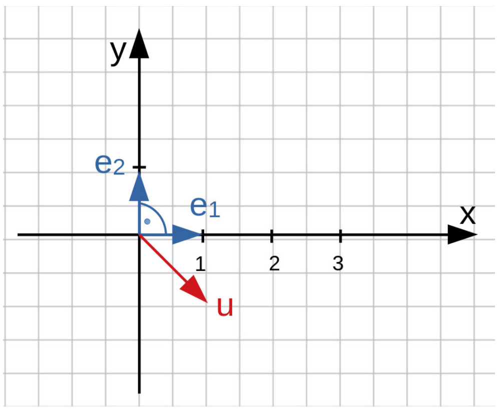
$\mathcal{C} = (c_1, c_2))$, gdzie $c_1 = (1,1), c_2 = (0,-1)$ to inna baza $\mathbb{R}^2$.

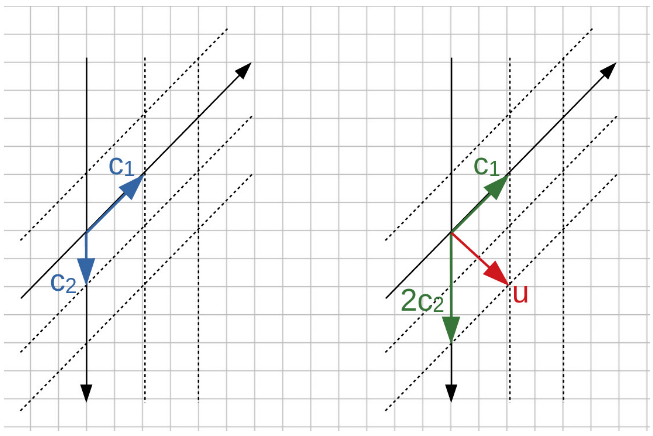
w $\mathcal{B}_k^2$

$u = (1, -1)$ oraz $u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{C}}$, $\alpha = ?$, $\beta = ?$

$(1, -1) = \alpha c_1 + \beta c_2 = \alpha(1,1) + \beta(0,-1) = (\alpha, \alpha - \beta)$

Stąd $\alpha = 1$, $\beta = 2$ oraz $u = \underline{[1, 2]_{\mathcal{C}}}$.




**Przykład 6.2.35.** $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,

$\mathcal{B}' = (b_1', b_2', b_3')$ inna baza, gdzie $b_1' = (4,2,1), b_2' = (-5,2,3), b_3' = (1,3,0)$

Spr. czy baza

dim $\mathbb{R}^3 = 3$

3 wektory

Skalary $4, 2, 1$ to współrzędne $b_1'$ w bazie kanonicznej.

Piszemy $b_1' = (4,2,1)$ zamiast $b_1' = [4,2,1]_{\mathcal{B}_k^3}$.

$r\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow$ lin. niezal. $\Rightarrow$ BAZA

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

Ponadto $b_1' = [1,0,0]_{\mathcal{B}'}$.

$-3\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} + 7\hat{k}$

Niech $v = (-3, 15, 7) \in \mathbb{R}^3$. Wyznaczymy współrzędne wektora $v$ w bazie $\mathcal{B}'$.
Niech $v = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}'}$, tzn. $v = \alpha b_1' + \beta b_2' + \gamma b_3'$. Otrzymujemy
$(-3, 15, 7) = \alpha(4,2,1) + \beta(-5,2,3) + \gamma(1,3,0) = (4\alpha - 5\beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 3\beta)$.
Aby wyznaczyć współrzędne $\alpha, \beta, \gamma$, należy rozwiązać układ równań

$b_1$

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 4w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array}\right] \xrightarrow{-4 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -11 & -35 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \leftrightarrow w_2]{-1 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - 16w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & -188 & -564 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{188} \cdot w_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 11w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow v = [1,2,3]_{\mathcal{B}'} = 1 \cdot b_1' + 2 \cdot b_2' + 3b_3'$$

„stara" baza

Niech $V$ będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b_1', \ldots, b_n')$ jej dwiema bazami. Wówczas istnieją skalary $\alpha_{ij} \in K$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że

„nowa" baza

$$\begin{array}{l} b_1' = \alpha_{11} b_1 + \alpha_{21} b_2 + \ldots + \alpha_{n1} b_n \\ b_2' = \alpha_{12} b_1 + \alpha_{22} b_2 + \ldots + \alpha_{n2} b_n \\ \ldots \\ b_n' = \alpha_{1n} b_1 + \alpha_{2n} b_2 + \ldots + \alpha_{nn} b_n \end{array}.$$

**Definicja 6.2.36.** Macierz $P \in M_n(K)$ postaci

każda kolumna współrz. wektorów z nowej bazy w starej bazie

$$P = [\alpha_{ij}] = \begin{array}{cccc} b_1' & & & b_n' \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą przejścia* od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$. Oznaczamy ją symbolem $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

Macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ zawsze jest nieosobliwa. Wynika to z faktu, że wektory bazy $\mathcal{B}'$ są liniowo niezależne.

$\det P \neq 0$

### Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy

Niech $V$ będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b_1', \ldots, b_n')$ jej dwiema bazami. Niech $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

**Twierdzenie 6.2.37.** Niech $v \in V$, $v = [x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{B}} = [x_1', \ldots, x_n']_{\mathcal{B}'}$. Wówczas $X = PX'$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$.

$P \cdot X' = X$

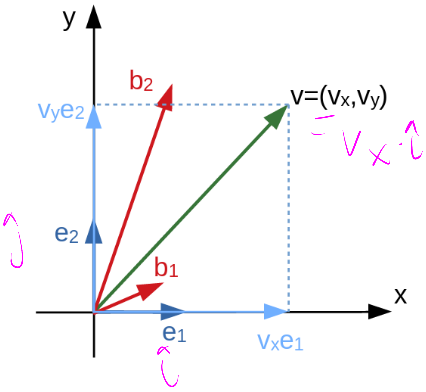
$X' = ?$

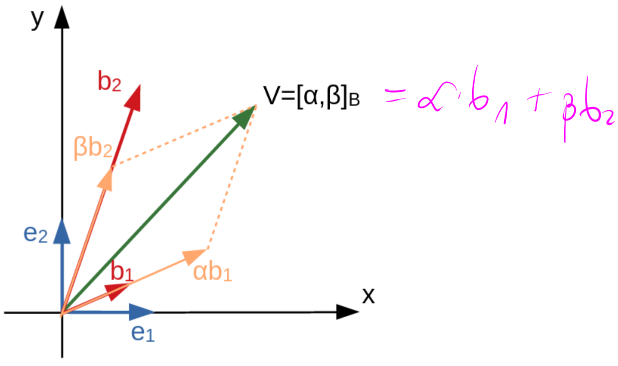


$X' = P^{-1} X$ ← $P^{-1}$ istnieje $\det P \neq 0$

$\mathbb{R}^2$

$$B^2_k=(e_1,e_2) \xrightarrow[P=P_{B^2_k\to B}]{\text{zmiana bazy}} B=(b_1,b_2)$$




**Przykład 6.2.35 - ciąg dalszy**
$\mathbb{R}^3=(\mathbb{R}^3,+,\mathbb{R},\cdot)$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}^3_k$ - baza kanoniczna,
$\mathcal{B}'=(b_1',b_2',b_3')$ inna baza, gdzie $b_1'=(4,2,1), b_2'=(-5,2,3), b_3'=(1,3,0)$

Wyznaczymy współrzędne wektora $v=(-3,15,7)$ w bazie $\mathcal{B}'$.

$$P=P_{\mathcal{B}^3_k\to\mathcal{B}'}=\begin{bmatrix}4&-5&1\\2&2&3\\1&3&0\end{bmatrix},\ X'=P^{-1}X=?.$$

ćw

Wyznaczamy macierz $P^{-1}=\frac{1}{47}\begin{bmatrix}9&-3&17\\-3&1&10\\-4&17&-18\end{bmatrix}$ i obliczamy

to samo co wyżej?

$$X'=\frac{1}{47}\begin{bmatrix}9&-3&17\\-3&1&10\\-4&17&-18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\15\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$\| \ \mathrm{lin}\{1,x,x^2\}$

$\mathbb{R}_2[x]=\{f\in\mathbb{R}[x] : \deg f\le 2\}$

$f(x)=c+bx+ax^2$

**Przykład 6.2.38.** Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ oraz jej dwie bazy
$\mathcal{B}=(1+x,x+x^2,1+x^2)$, $\mathcal{B}'=(1,1+x,1+x+x^2)$. Wyznaczmy macierz $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

$0\cdot x^2+0x+1=[\alpha_1,\beta_1,\gamma_1]_{\mathcal{B}}=\alpha_1(1+x)+\beta_1(x+x^2)+\gamma_1(1+x^2)=(\alpha_1+\gamma_1)+(\alpha_1+\beta_1)x+(\beta_1+\gamma_1)x^2$

Stąd $\begin{cases}\alpha_1+\gamma_1=1\\\alpha_1+\beta_1=0\\\beta_1+\gamma_1=0\end{cases}$ i ostatecznie $\alpha_1=\frac{1}{2},\ \beta_1=-\frac{1}{2},\ \gamma_1=\frac{1}{2}$.

Łatwo zauważyć, że $1+x=[\alpha_2,\beta_2,\gamma_2]_{\mathcal{B}}=[1,0,0]_{\mathcal{B}}$. $=1\cdot b_1+0\cdot b_2+0\cdot b_3$
Analogicznie obliczenia przeprowadzamy dla $1+x+x^2=[\alpha_3,\beta_3,\gamma_3]_{\mathcal{B}}$

i otrzymujemy $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

$\|$ ? $b_1$ zbuduj!

ćw. $\mathcal{B}$ - baza?
$\dim\mathbb{R}_2[x]=3$
3 wektory
↓
spr. lin. niezal.
$r\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=3$

$\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}''$

**Twierdzenie 6.2.39.** Niech $V$ będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ jej bazami. Wówczas

i) $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1}$, macierz odwrotna do macierzy $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$

ii) $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B} \arrow[dd, "P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}"] \\
\mathcal{B}^n_k \arrow[ur, "P_{\mathcal{B}^n_k\to\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "P_{\mathcal{B}^n_k\to\mathcal{B}'}"'] & \\
 & \mathcal{B}'
\end{tikzcd}$$

łatwe

łatwe

RACHUNKI!

baza kanoniczna $\mathbb{R}^n$

**Uwaga 6.2.40.** W przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdy baza początkowa to baza kanoniczna $\mathcal{B}^n_k$, łatwo wypisać macierze przejścia do nowych baz $P_{\mathcal{B}^n_k\to\mathcal{B}}$ oraz $P_{\mathcal{B}^n_k\to\mathcal{B}'}$. Wypisanie macierzy $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ wymaga rachunków. Na mocy twierdzenia 6.2.39 otrzymujemy $\boxed{P_{\mathcal{B}^n_k\to\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}^n_k\to\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}$, skąd $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}^n_k\to\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B}^n_k\to\mathcal{B}'}$.

$P^{-1}_{\mathcal{B}^n_k\to\mathcal{B}} \cdot$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
**Wykład nr 7**
Data: ......................

TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

## 7.1 Definicja przekształcenia liniowego i podstawowe własności

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem $K$.

**Definicja 7.1.1.** Odwzorowanie $\varphi : V \to W$ spełniające warunki

i) własność addytywności $\forall u, v \in V \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v)$

ii) własność jednorodności $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v)$,

nazywamy *odwzorowaniem liniowym* lub *przekształceniem liniowym* lub *homomorfizmem przestrzeni liniowych*.

**Twierdzenie 7.1.2.** Niech $\varphi : V \to W$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

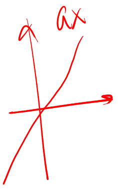
i) $\varphi$ jest liniowe

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$

iii) $\forall v_1, \ldots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$
$\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \ldots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących $V$ w $W$ oznaczamy $\mathcal{L}_K(V, W)$ lub $Hom_K(V, W)$ (lub krótko $\mathcal{L}(V, W)$ lub $Hom(V, W)$, gdy wiemy, z jakim ciałem mamy do czynienia).

**Uwaga 7.1.3.** Często notujemy $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, +, K, \cdot)$, to znaczy używamy tych samych symboli dla działań w przestrzeniach $V$ i $W$, mimo że są to różne działania.




**Przykład 7.1.4.** Czy $\varphi$ jest liniowe?

$K$ – ciało

1) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ ustalone

$(K, +, K, \cdot)$ prz. wektorowa

Odwzorowanie jest liniowe, bowiem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in R$ mamy
$\varphi(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha\varphi(x)$ oraz
$\varphi(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$.

$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \mathbb{R}, \cdot)$

funkcja liniowa

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ustalone

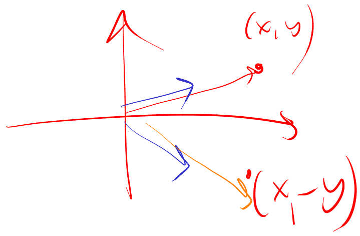
$2b \neq b$

$b = 0$

Jeśli $b \neq 0$, to odwzorowanie nie jest liniowe, bowiem
$\varphi(1+1) = \varphi(2) = 2a + b \neq \varphi(1) + \varphi(1) = (a+b) + (a+b) = 2a + 2b$.

3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, symetria względem osi $Ox$

Ponieważ $\varphi(x, y) = (x, -y)$, zatem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
$\varphi(\alpha(x, y)) = \varphi(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x, -y) = \alpha\varphi(x, y)$ oraz
$\varphi\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)$.
Odwzorowanie jest liniowe.




$\varphi(1, -1, 3) = (1 - (-1) + 3, 2 \cdot (-1) + 3 + 1) = (5, 2)$

4) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

Odwzorowanie nie jest liniowe.
WYSTARCZY
$L = \varphi\big(\alpha(x, y, z)\big) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + 1)$
$P = \alpha\varphi(x, y, z) = \alpha(x - z + z, 2y + z + 1) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + \alpha)$
Na ogół $L \neq P$. Możemy podać kontrprzykład
$\varphi\big(5 \cdot (1, 0, 0)\big) = \varphi(5, 0, 0) = (5, 1) \neq 5 \cdot \varphi(1, 0, 0) = 5 \cdot (1, 1) = (5, 5)$

$(5 - 0 + 0, 2 \cdot 0 + 0 + 1)$ $\varphi(1, 0, 0) = (1 - 0 + 0, 2 \cdot 0 + 0 + 1)$

**Uwaga 7.1.5.** i) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

ii) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + jz)$.

**Przykład 7.1.6.** Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, dane wzorem
$\varphi(p)(x) = \underbrace{(3 - x)p''(x)}_{\deg \,\leq 1} + 4p'(x)$, dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_2[x]$, jest liniowe?

Sprawdzimy, że $\varphi$ jest liniowe. Wynika to z liniowości różniczkowania.
Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ mamy
$\varphi(p+q)(x) = (3-x)(p+q)''(x) + 4(p+q)'(x) = (3-x)\Big(p''(x) + q''(x)\Big) + 4\Big(p'(x) + q'(x)\Big) = \Big((3 - x)p''(x) + 4p'(x)\Big) + \Big((3 - x)q''(x) + 4q'(x)\Big) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x)$,
dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(p + q) = \varphi(p) + \varphi(q)$.
Dla dowolnych $p \in \mathbb{R}_2[x], \alpha \in \mathbb{R}$ mamy
$\varphi(\alpha p)(x) = (3-x)(\alpha p)''(x) + 4(\alpha p)'(x) = (3-x)\alpha \cdot p''(x) + 4\alpha \cdot p'(x) = \alpha \cdot \Big((3-x)p''(x) + 4p'(x)\Big) = \alpha \cdot \varphi(p)(x)$. dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(\alpha p) = \alpha\varphi(p)$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$.

**Twierdzenie 7.1.7.** Jeśli odwzorowanie $\varphi : V \to W$ jest liniowe, to wówczas

i) $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$,

ii) $\forall v \in V \ \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

*Dowód.* i) Ponieważ $\mathbf{0}_W + \varphi(x) = \varphi(x) = \varphi(x + \mathbf{0}_V) = \varphi(x) + \varphi(\mathbf{0}_V)$, zatem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
ii) Na mocy i) dla dowolnego $v \in V$ mamy $\mathbf{0}_W = \varphi(\mathbf{0}_V) = \varphi(v - v) = \varphi(v) + \varphi(-v)$. Stąd $\varphi(-v) = -\varphi(v)$. □

!

**Wniosek 7.1.8.** Niech $\varphi : V \to W$. Jeśli $\varphi(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, to $\varphi$ nie jest liniowe.

*Dowód.* Teza wynika z twierdzenia 7.1.7 i) na mocy prawa kontrapozycji. □

**Przykład 7.1.9.** Odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ nie jest liniowe, bowiem $f(0) = 5 \neq 0$.

$ax+b \quad b \neq 0$

**Definicja 7.1.10.** Odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$ nazywamy:

i) *monomorfizmem*, jeśli $\varphi$ jest injekcją,

ii) *epimorfizmem*, jeśli $\varphi$ jest surjekcją,

iii) *izomorfizmem*, jeśli $\varphi$ jest bijekcją,

iv) *endomorfizmem*, jeśli $V = W$,   $\varphi : V \to V$

v) *automorfizmem*, jeśli $V = W$ i $\varphi$ jest bijekcją,

vi) *formą liniową*, jeśli $W = K$.   $\varphi : V \to K \quad V = (V, +, K, \cdot) \quad K = (K, +, K, \cdot)$

**Twierdzenie 7.1.11.** Niech $V$ oraz $W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem $K$. Niech $(b_1, \ldots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni $V$ oraz niech $w_1, \ldots, w_n \in W$ będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ takie, że $\varphi(b_i) = w_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

!

**Uwaga 7.1.12.** Z powyższego twierdzenia wynika, że aby w pełni określić odwzorowanie liniowe na przestrzeni liniowej $V$ wystarczy określić obrazy wektorów bazowych przestrzeni $V$.

$\mathbb{R}_2[x] \quad \mathcal{B}_{st} = (1, x, x^2)$

**Przykład 7.1.13.** Podaj wzór odwzorowania liniowego $\varphi$, jeśli

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(x^2 + x) = 6x + 10, \quad \varphi(x - 1) = 4, \quad \varphi(2x) = 8.$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_2[x]$ bazą standardową jest $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Mamy

$$\begin{cases} \varphi(x^2 + x) = \varphi(x^2) + \varphi(x) = 6x + 10 \\ \varphi(x - 1) = \varphi(x) - \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 8 \end{cases}.$$

$\overset{?}{\Longrightarrow} \varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)$ ?

Stąd $\varphi(x) = 4$, $\varphi(1) = \varphi(x) - 4 = 0$, $\varphi(x^2) = 6x + 10 - \varphi(x) = 6x + 6$.

Dowolny $p \in \mathbb{R}_2[x]$ jest postaci $p(x) = ax^2 + bx + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1) = a \cdot (6x + 6) + b \cdot 4 + c \cdot 0 = 6ax + 6a + 4b$.

$\varphi$-liniowe   ZNAM

$p \in \mathbb{R}_2[x] \quad p(x) = ax^2 + bx + c$

$\varphi(p) = ?$

$\varphi(ax^2 + bx + c) = ?$

## 7.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Niech $V$ oraz $W$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $K$. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

**Definicja 7.2.1.** i) Zbiór $\{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$ nazywamy *jądrem* odwzorowania liniowego $\varphi$ i oznaczamy $\mathrm{Ker}\varphi$. "przeciwobraz" zera

ii) Zbiór $\{w \in W : \exists v \in V\, \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$ nazywamy *obrazem* odwzorowania liniowego $\varphi$ i oznaczamy $\mathrm{Im}\varphi$ lub $\varphi(V)$. "zbiór wartości"

**Uwaga 7.2.2.** Dla dowolnego odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ zbiory $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathrm{Im}\varphi$ są niepuste.

*Dowód.* Ponieważ $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, zatem $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathbf{0}_W \in \mathrm{Im}\varphi$. □

**Twierdzenie 7.2.3.** Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ zbiór $\mathrm{Ker}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $V$, zaś zbiór $\mathrm{Im}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $W$.

Niech $V$ oraz $W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $K$.

**Twierdzenie 7.2.4.** Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

i) $\varphi$ jest injekcją $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$,

ii) $\varphi$ jest surjekcją $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\varphi = W$. zbiór wartości = przeciwdziedzina

**Definicja 7.2.5.** Jeśli $\dim \mathrm{Im}\varphi < \infty$, to liczbę tę nazywamy *rzędem* odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ i oznaczamy $r(\varphi)$ lub $\mathrm{rank}(\varphi)$.

TEST!

**Twierdzenie 7.2.6.** (Twierdzenie o rzędzie, Rank-nullity theorem) Niech $V$ oraz $W$ będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem $K$. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$. Wówczas

$$\underbrace{r(\varphi)}_{\dim \mathrm{Im}(\varphi)} + \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim V.$$

$\varphi : V \to W$

**Wniosek 7.2.7.** Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ mamy $\dim \mathrm{Im}\varphi \leq \dim V$.

**Przykład 7.2.8.**

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t, x - y + z + 6t, x + y - z - 4t) \in \mathrm{Im}(\varphi)$$

Wyznacz jądro oraz obraz $\varphi$, ich bazy i wymiary. Podaj własności $\varphi$.

TEST

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^7$ liniowe

czy to surjekcja?

Tw. $7 \neq \dim \mathrm{Im}\varphi \leq 3 = \dim \mathbb{R}3$

1) JĄDRO

$$\varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y + z + 6t = 0 \\ x + y - z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{2}w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_3}$$

OBRAZ



$(x, x, x) + (y, -y, y) + (z, z, -z) + (2t, 6t, -4t)$

$x(1,1,1) + y(1,-1,1) + z(1,1,-1) + t(2,6,-4)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ x = -3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$(t, 2t, -3t, t) = t(1, 2, -3, 1)$

v baza

$\mathrm{Ker}\varphi = \{(t, 2t, -3t, t),\ t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\{(1, 2, -3, 1)\}$

NIE INJEKCJA

Układ $\{(1, 2, -3, 1)\}$ jest bazą $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 1$.
Zatem $\varphi$ nie jest monomorfizmem. Ponadto

surjekcja

- $r(\varphi) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}\varphi = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, zatem $\varphi$ jest epimorfizmem.

Stąd $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$. Można to również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

(2) OBRAZ

$\varphi(x, y, z, t) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + z(1, 1, -1) + t(2, 6, -4)$

$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (2, 6, -4)\}$

$\mathrm{lin}\{u, v\} = \mathrm{lin}\{u+v, v\}$

minor $\neq 0$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$$

baza $\varphi$

generatory obraz

$W \subset \mathbb{R}^3$
$\dim W = 3$
$\dim \mathbb{R}^3 = 3$
$\Downarrow$
$W = \mathbb{R}^3$

Układ $\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{Im}\varphi$.
$\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}^3 \ \wedge\ \dim \mathrm{Im}\varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \ \Rightarrow\ \mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$. $\rightarrow$ surjekcja

**Twierdzenie 7.2.9.** Niech $V$ oraz $W$ będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem $K$. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie injekcją, zaś wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ tworzą układ liniowo niezależny. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n) \in W$ również tworzą układ liniowo niezależny.

Tw. 6.2.30

**Wniosek 7.2.10.** Niech $V$ oraz $W$ będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem $K$ takimi, że $\dim V = \dim W = n$. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie injekcją, zaś wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ tworzą bazę przestrzeni $V$. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n) \in W$ tworzą bazę przestrzeni $W$.

baza $\xrightarrow[\text{injekcja}]{\varphi}$ baza

## 7.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech $U$,$V$, $W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $K$.

**Twierdzenie 7.3.1.** Zbiór $\mathcal{L}(V, W)$ wraz z działaniami

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W)$$

określonymi wzorami $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$,
jest przestrzenią liniową nad ciałem $K$.

złożenie odw. lin. jest odwz. lin.

**Twierdzenie 7.3.2.** i) Jeśli $f \in \mathcal{L}(U, V)$ oraz $g \in \mathcal{L}(V, W)$, to wówczas $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$.

ii) Jeśli $f \in \mathcal{L}(V, W)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, U)$.

odwz. odwrotne do liniowego jest liniowe

Oznaczmy przez $Aut_K(V) = \{f \in \mathcal{L}_K(V, V) :\ f - bijekcja\}$ zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej $V$.

odwracalne

$(Aut_K(V), \circ)$

**Wniosek 7.3.3.** Zbiór $Aut_K(V)$ wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprzemienną.

*Dowód.* Wewnętrzność działania składania wynika na mocy twierdzenia 7.3.2 i). Składania odwzorowań jest łączne. Elementem neutralnym jest odwzorowanie identycznościowe $\mathrm{id}_V$. Elementem symetrycznym do $f \in Aut_K(V)$ jest $f^{-1}$, bowiem na mocy twierdzenia 7.3.2 ii) $f^{-1} \in Aut_K(V)$. □

$GL_n(K)$

Grupa $Aut_K(V)$ bywa też oznaczana symbolem $GL(V)$ i nazywana *pełną* lub *ogólną grupą liniową przestrzeni liniowej* $V$.

**Przykład 7.3.4.** Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dane wzorem $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

## 7.4 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Niech $V$ oraz $W$ będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem $K$. Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni $V$ i $W$ odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$.

$\dim V = n$
$\dim W = m$

**Definicja 7.4.1.** *Macierzą* (lub *reprezentacją macierzową*) *odwzorowania liniowego* $\varphi$ w bazach $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ nazywamy macierz $A \in M_{m\times n}(K)$, której kolejne kolumny to współrzędne wektorów $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ w bazie $\mathcal{B}_W$. Oznaczamy ją symbolem $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

$b_1, \dots, b_n \in V$

komb. lin. $c_1, \dots, c_m$ $\quad \varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ $\quad \cap W \quad \cap W$

**Przykład 7.4.2.** Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad \varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$, gdy rozważamy

a) w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ bazy kanoniczne

$\mathcal{B}_k^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ $\quad \mathcal{B}_k^2 = \{(1,0),(0,1)\}$

$(3\cdot 0, 2\cdot 0+1)$

$\varphi(1, 0, 0) = (3, 0)$, $\varphi(0, 1, 0) = (0, 2)$, $\varphi(0, 0, 1) = (0, 1)$, $\quad M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $A$

obrazy wektorów z bazy $\mathbb{R}^3$

reprezentacja macierzowa $\varphi$

$(3\cdot 1, 2\cdot 0+0)$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y + z \end{bmatrix}$$

baza $\mathbb{R}^2$

b) bazy $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$

baza $\mathbb{R}^3$ $\quad$ w $\mathcal{B}_k^3$

$\varphi(b_1) = \varphi(1, 2, 0) = (3, 4) = [\alpha_1, \beta_1]_\mathcal{C}$, $\quad (3, 4) = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1)$,
$\Rightarrow \alpha_1 = 3, \beta_1 = -2, \varphi(b_1) = [3, -2]_\mathcal{C}$

$(3\cdot 1, 2\cdot 2+0)$

$\varphi(b_2) = \varphi(1, 1, 1) = (3, 3) = [\alpha_2, \beta_2]_\mathcal{C}$, $\quad (3, 3) = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2)$
$\Rightarrow \alpha_2 = 3, \beta_2 = -3, \varphi(b_2) = [3, -3]_\mathcal{C}$

$\varphi(b_3) = \varphi(0, 0, 1) = (0, 1) = [\alpha_3, \beta_3]_\mathcal{C}$, $\quad (0, 1) = \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3)$
$\Rightarrow \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1, \varphi(b_3) = [0, 1]_\mathcal{C}$

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\varphi(x, y, z) = (3x, 2y+z)$

$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y+z \end{bmatrix}$

**Obserwacja:** Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

**Uwaga 7.4.3.** Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)$.

**Uwaga 7.4.4.** Rozważmy dwie przestrzenie liniowe $V$ oraz $W$ nad $\mathbb{R}$ takie, że $\dim V = n$ oraz $\dim W = m$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni $V$, zaś, $\mathcal{C}$ bazą przestrzeni $W$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{odwzorowanie liniowe } \varphi} & W \\ \mathcal{B} & v \longmapsto w=\varphi(v) & \mathcal{C} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)} & \mathbb{R}^m \\ & [v_1, v_2, \dots, v_n]_B \longmapsto [w_1, w_2, \dots, w_m]_C & \end{array}$$

macierz $2\times 2$

$\deg f \leq 1$

**Przykład 7.4.5.** Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{C}_1[z] \to M_2(\mathbb{C})$, $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$, względem baz standardowych danych przestrzeni $(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$ oraz $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\alpha \cdot z + \beta \cdot 1$

Weźmy dowolny $p \in \mathbb{C}_1[z]$. Jest on postaci $p(z) = \alpha z + \beta$.
Rozważamy bazę $\mathcal{B} = (1, z)$ przestrzeni $\mathbb{C}_1[z]$ oraz bazę $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ przestrzeni $M_2(\mathbb{C})$.

$\alpha = 0 \quad \beta = 1$

$0 \cdot z + 1 \cdot 1$ $\quad f(1) = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 0, 0, 1]_{\mathcal{C}}$

$1 \cdot z + 0$ $\quad f(z) = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = A = [2+i, 1, 3, 4-i]_{\mathcal{C}}$

$\alpha = 1 \quad \beta = 0$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[z] = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) = 4$, $\Rightarrow$ $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4\times 2}(\mathbb{C})$, $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4-i \end{bmatrix}$



$\dim \mathbb{C}_1[z] = 2$ $\qquad 4 \times 2$

$\dim M_2(\mathbb{C}) = 4$