Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 11
Data: ....

TEMAT: *Formy kwadratowe*

10.1 Definicja formy kwadratowej

Przypomnienie: Każdą macierz kwadratową D można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej $D = B+C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(D+D^T)$, $C = \frac{1}{2}(D-D^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$.

Obserwacja: Zauważmy, że $X^TDX = X^TBX$.
Istotnie $X^TDX = X^T(B+C)X = X^TBX + X^TCX$ oraz $X^TCX = X^T\frac{D-D^T}{2}X = \frac{1}{2}\left(X^TDX - X^TD^TX\right) = \frac{1}{2}\left(X^TDX - (X^TD^TX)^T\right) = \frac{1}{2}\left(X^TDX - X^TDX\right) = O$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K taką, że $\dim_K V = n < \infty$. Ustalmy bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ przestrzeni V.

Definicja 10.1.1. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą symetryczną. Odwzorowanie $\gamma : V \to K$ dane wzorem $\gamma(x) = X^TAX$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dla dowolnego $x \in V, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$, nazywamy *formą kwadratową*. Macierz symetryczną A nazywamy *macierzą formy kwadratowej* γ *w bazie* $\mathcal{B}$.

Na mocy powyższej obserwacji założenie $A = A^T$ możemy przyjąć bez straty dla ogólności.

Uwaga 10.1.2. i) Jeśli $A = [a_{ij}]$, to wówczas $\gamma(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$.

ii) γ jest wielomianem n zmiennych jednorodnym stopnia 2.

iii) $\forall x \in V \ \forall \lambda \in K \quad \gamma(\lambda x) = \lambda^2\gamma(x)$

Dowód. i) $[x_1 \ldots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \ldots x_n] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$
ii) Na mocy *i)* każdy jednomian γ jest stopnia 2.

iii) Niech $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\lambda \in K$. Wówczas na mocy i) mamy $\gamma(\lambda x) = \gamma(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\lambda x_i)(\lambda x_j) = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$. $\square$

Uwaga 10.1.3. Każdej macierzy kwadratowej A odpowiada forma kwadratowa γ zdefiniowana powyżej. I odwrotnie, każdej formie kwadratowej γ odpowiada macierz B zdefiniowana następująco.

Niech $f : V \times V \to K$, $f(x, y) := \frac{1}{2}\big(\gamma(x + y) - \gamma(x) - \gamma(y)\big)$.
Odwzorowanie f jest *dwuliniowe*, tzn. liniowe ze względu na każdą zmienną.

$$\forall x, y, z \in V,\ \forall \alpha, \beta \in K \quad f(\alpha x+\beta y, z) = \alpha f(x, z)+\beta f(y, z) \wedge f(x, \alpha y+\beta z) = \alpha f(x, y)+\beta f(x, z)$$

Odzworowanie f nazywamy *formą dwuliniową biegunowa względem* γ lub *stowarzyszoną* z γ. Forma dwuliniowa f jest *symetryczna*, tzn. $\forall x, y \in V\ f(x, y) = f(y, x)$.
Jeśli $x, y \in V$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$$f(x, y) = f(x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n, y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_nb_n)$$

$$= x_1f(b_1, y_1b_1+y_2b_2+\ldots+y_nb_n)+x_2f(b_2, y_1b_1+y_2b_2+\ldots+y_nb_n)+\ldots+x_nf(b_n, y_1b_1+y_2b_2+\ldots+y_nb_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_jf(b_i, b_j) = X^TBY, \quad \text{gdzie} \quad B = [b_{ij}],\ b_{ij} = f(b_i, b_j).$$

Zauważmy, że $f(x, x) = \frac{1}{2}(\gamma(2x) - 2\gamma(x)) = \gamma(x)$, zatem $\gamma(x) = X^TBX$ oraz $A = B$.
Podsumowując, jeśli w przestrzeni V ustalimy bazę, to istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy macierzami $A \in M_n(K)$ oraz formami kwadratowymi γ na V.

Przykład 10.1.4. Poniższe odwzorowania to formy kwadratowe.

i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^3$

$$\gamma(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ii) Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem, zaś $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją taką, że $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.
Niech $P_0 \in \Omega$. Różniczka rzędu drugiego funkcji f w punkcie P_0

$$d^2_{P_0}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad d^2_{P_0}f(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0)h_ih_j$$

jest formą kwadratową. Jej macierz ma postać

$$H_f(P_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P_0) \\ \ldots & & \ldots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P_0) \end{bmatrix}.$$

Jest to tak zwana *macierz Hessego*. Jej wyznacznik nazywamy *hesjanem*.

10.2 Określoność formy kwadratowej

Dla dowolnej formy kwadratowej γ mamy $\gamma(\mathbf{0}) = 0$.

Definicja 10.2.1. Formę kwadratową $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T AX$ nazywamy

i) *dodatnio określoną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) > 0$,

ii) *ujemnie określoną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) < 0$,

iii) *dodatnio półokreśloną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \geq 0$,

iv) *ujemnie półokreśloną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \leq 0$,

v) *nieokreśloną*, jeśli przyjmuje wartości zarówno dodatnie jak i ujemne.

Terminologia ta przenosi się na macierze. Macierz symetryczna A jest dodatnio określona, gdy forma kwadratowa $\gamma(x) = X^T AX$ jest dodatnio określona itd.

Przykład 10.2.2. i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jest dodatnio określona

ii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$ jest ujemnie określona

iii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ jest nieokreślona, bowiem $\gamma(1, 0, 1) = 2 > 0$, zaś $\gamma(0, 1, 0) = -1 < 0$.

iv) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_3^2$ jest dodatnio półokreślona. $\forall x_2 \in \mathbb{R} \;\; \gamma(0, x_2, 0) = 0$

Badanie określoności formy kwadratowej

Definicja 10.2.3. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$.

i) *Minorem głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ wierszy i kolumn o tych samych indeksach.

ii) *Minorem wiodącym głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy powstłej przez skreślenie $n - k$ ostatnich wierszy i kolumn. Oznaczamy go symbolem Δ_k.

Symbolem $D_{i_1 \ldots i_k}$ oznaczamy minor główny stopnia k, powstały przez skreślenie wierszy i kolumn poza tymi o indeksach $i_1 < \ldots < i_k$.

Przykład 10.2.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{bmatrix}$

minory wiodące główne: $\Delta_1 = D_{11} = 1,\ \Delta_2 = D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4,$

$\Delta_3 = D_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_4 = D_{1234} = \det A = 0$

minory główne: $D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = 12,\ D_{24} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = 0$

Twierdzenie 10.2.5 (Kryterium Sylvestera)**.** Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną.

i) A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne są dodatnie, tzn. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}\ \Delta_k > 0$.

ii) A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne parzystego stopnia są dodatnie, a nieparzystego ujemne,
tzn. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}\ (-1)^k \Delta_k > 0$.

Bez dowodu.

Przykład 10.2.6. i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ jest ujemnie określona.

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = -3 < 0.$$

ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ jest półokreślona ujemnie, gdyż $\gamma(x_1, x_2) = -x_2^2 \leq 0$.

Uwaga 10.2.7. Z warunku $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}\ \Delta_k \geq 0$ nie wynika dodatnia półokreśloność A.

Twierdzenie 10.2.8. Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $A = A^T$.

i) Forma kwadratowa γ jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne,
tzn. $\forall\, 1 \leq k \leq n \quad \forall\, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n \quad D_{i_1 \ldots i_k} \geq 0$.

ii) Forma kwadratowa γ jest ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy minory główne macierzy A przyjmują następujące znaki
$\forall\, 1 \leq k \leq n \quad \forall\, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n \quad (-1)^k D_{i_1 \ldots i_k} \geq 0$.

Przykład 10.2.9. Forma kwadratowa $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ jest dodatnio półokreślona.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \Delta_1 = 1, \ \Delta_2 = \Delta_3 = 0,$$

$D_2 = 0$, $D_3 = 1$, $D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $D_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$
Oczywiste bowiem $\gamma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^2 \geq 0$.

Uwaga 10.2.10. i) Jeśli $\Delta_2 = D_{12} < 0$, to macierz jest nieokreślona.

ii) Rzeczywista macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ma n rzeczywistych wartości własnych (licząc z krotnościami).

Dowód. i) $\Delta_2 = D_{12}$ to minor stopnia 2. Jeśli $D_{12} = (-1)^2 D_{12} < 0$, to na mocy kryterium Sylvestera, macierz nie jest dodatnio określona ani ujemnie określona. Na mocy twierdzenia 10.2.8 nie jest półokreślona dodatnio ani półokreślona ujemnie.
ii) Dowód można znaleźć w [4]. □

Twierdzenie 10.2.11 (Kryterium wartości własnych)**.** Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $A = A^T$ oraz niech $Spec(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Wówczas forma kwadratowa γ jest

i) dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots n\} \quad \lambda_i > 0$,

ii) ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots n\} \quad \lambda_i < 0$,

iii) dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots n\} \quad \lambda_i \geq 0$,

iv) ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots n\} \quad \lambda_i \leq 0$,

iv) nieokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists\, i, j \in \{1, 2, \ldots n\} \quad \lambda_i > 0 \wedge \lambda_j < 0$.

Dowód. Niech $\lambda \in Spec(A)$ oraz niech v będzie wektorem własnym odpowiadającym λ. Oczywiście $v \neq \mathbf{0}_V$, więc $|v| \neq 0$. Obliczamy $v^T A v = \gamma(v) = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \lambda |v|^2$. Zatem $\gamma(v) > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$, co dowodzi podpunktu i). Analogicznie w pozostałych przypadkach.
□

Przykład 10.2.12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest dodatnio półokreślona.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -t(1-t)^2 + t = t\big(1 - (1-t)^2\big) = t(2t - t^2) = t^2(2-t)$$

$Spec(A) = \{\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\}$