

TEMAT: *Formy kwadratowe*

$n=2$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
 $X^T A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

10.1 Definicja formy kwadratowej

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a x_1 + b x_2 \\ c x_1 + d x_2 \end{pmatrix} = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_1 x_2 + d x_2^2$

Przypomnienie: Każdą macierz kwadratową D można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej $D = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(D + D^T)$, $C = \frac{1}{2}(D - D^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$.

Obserwacja: Niech D będzie macierzą kwadratową stopnia n .

Niech $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, wówczas $X^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ oraz $X^T D X$ jest macierzą stopnia 1.

$f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

Bez straty dla ogólności można się ograniczyć do macierzy symetrycznej $A = A^T$

Zauważmy, że $X^T D X = X^T B X$.

Istotnie $X^T D X = X^T (B + C) X = X^T B X + X^T C X$ oraz $X^T C X = X^T \frac{D - D^T}{2} X = \frac{1}{2} (X^T D X - X^T D^T X) = \frac{1}{2} (X^T D X - (X^T D X)^T) = \frac{1}{2} (X^T D X - X^T D X) = 0$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K taką, że $\dim_K V = n < \infty$. Ustalmy bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ przestrzeni V .

Definicja 10.1.1. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą symetryczną. Odwzorowanie $\gamma : V \rightarrow K$ dane wzorem $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dla dowolnego $x \in V, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$, nazywamy formą kwadratową. Macierz symetryczną A nazywamy macierzą formy kwadratowej γ w bazie \mathcal{B} .

Na mocy powyższej obserwacji założenie $A = A^T$ możemy przyjąć bez straty dla ogólności.

$n=3$ $\cup x_1^2 + \cup x_1 x_2 + \cup x_1 x_3 + \cup x_2 x_1 + \cup x_2^2 + \cup x_2 x_3 + \dots$

Uwaga 10.1.2. i) Jeśli $A = [a_{ij}]$, to wówczas $\gamma(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$.

ii) γ jest wielomianem n zmiennych jednorodnym stopnia 2.

iii) $\forall x \in V \forall \lambda \in K \quad \gamma(\lambda x) = \lambda^2 \gamma(x)$

wszystkie jednomiany są stopnia 2

Np. $f(x,y) = x^2 - 3xy$
 $f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)^2 - 3(\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2(x^2 - 3xy)$

Dowód. i) $[x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} =$

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

ii) Na mocy i) każdy jednomian γ jest stopnia 2.

iii) Niech $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\lambda \in K$. Wówczas na mocy i) mamy $\gamma(\lambda x) = \gamma(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\lambda x_i)(\lambda x_j) = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$. \square

Uwaga 10.1.3. Każdej macierzy kwadratowej A odpowiada forma kwadratowa γ zdefiniowana powyżej. I odwrotnie, każdej formie kwadratowej γ odpowiada macierz B zdefiniowana następująco.

Niech $f : V \times V \rightarrow K$, $f(x, y) := \frac{1}{2}(\gamma(x+y) - \gamma(x) - \gamma(y))$.

Odwzorowanie f jest dwuliniowe, tzn. liniowe ze względu na każdą zmienną.

$$\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in K \quad f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z) \wedge f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)$$

Odwzorowanie f nazywamy formą dwuliniową biegunową względem γ lub stowarzyszoną z γ . Forma dwuliniowa f jest symetryczna, tzn. $\forall x, y \in V \quad f(x, y) = f(y, x)$.

Jeśli $x, y \in V$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$, to wówczas

$$f(x, y) = f(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n)$$

$$= x_1 f(b_1, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n) + x_2 f(b_2, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n) + \dots + x_n f(b_n, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j f(b_i, b_j) = X^T B Y, \quad \text{gdzie } B = [b_{ij}], \quad b_{ij} = f(b_i, b_j).$$

Zauważmy, że $f(x, x) = \frac{1}{2}(\gamma(2x) - 2\gamma(x)) = \gamma(x)$, zatem $\gamma(x) = X^T B X$ oraz $A = B$.

Podsumowując, jeśli w przestrzeni V ustalimy bazę, to istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy macierzami $A \in M_n(K)$ oraz formami kwadratowymi γ na V .

Przykład 10.1.4. Poniższe odwzorowania to formy kwadratowe.

i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$

Handwritten notes: $+0 \cdot x_2 x_3$, $Tu z A y$, $h = 2 + 2$

$$\gamma(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Handwritten annotations on the matrix: a_{13} (pointing to 2), a_{31} (pointing to 2), a_{31} (pointing to 2), a_{31} (pointing to 2).

ii) Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem, zaś $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dowolną funkcją taką, że $f \in C^2(\Omega)$.

Niech $P_0 \in \Omega$. Różniczka rzędu drugiego funkcji f w punkcie P_0

$$d_{P_0}^2 f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_{P_0}^2 f(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) h_i h_j$$

Handwritten notes: h_1, h_2, h_3 (pointing to h_i), $dx_i dx_j$, h_1, h_2, h_3

jest formą kwadratową. Jej macierz ma postać

$$H_f(P_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P_0) \end{bmatrix}.$$

Jest to tak zwana *macierz Hessego*. Jej wyznacznik nazywamy *hesjanem*.

f'
 f'_x

$n=1$ $n=2$
 $y=f(x)$ $z=f(x,y)$

$f(x)$ $f'_x(x,y)$
 $f'_y(x,y)$
 $\frac{df}{dx}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$

10.2 Określoność formy kwadratowej

Dla dowolnej formy kwadratowej γ mamy $\gamma(\mathbf{0}) = 0$.

Definicja 10.2.1. Formę kwadratową $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$ nazywamy

- i) *dodatnio określoną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) > 0$,
- ii) *ujemnie określoną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) < 0$,
- iii) *dodatnio półokreśloną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \geq 0$,
- iv) *ujemnie półokreśloną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \leq 0$,
- v) *nieokreśloną*, jeśli przyjmuje wartości zarówno dodatnie jak i ujemne.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

Terminologia ta przenosi się na macierze. Macierz symetryczna A jest dodatnio określona, gdy forma kwadratowa $\gamma(x) = X^T A X$ jest dodatnio określona itd.

Przykład 10.2.2. i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jest dodatnio określona

ii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$ jest ujemnie określona

iii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ jest nieokreślona, bowiem $\gamma(1, 0, 1) = 2 > 0$, zaś $\gamma(0, 1, 0) = -1 < 0$.

iv) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_3^2$ jest dodatnio półokreślona. $\forall x_2 \in \mathbb{R} \quad \gamma(0, x_2, 0) = 0$

$\Rightarrow 0$
 $= 0$
 $\hookrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$
 $(0, 0, 0)$
 $\gamma(0, 1, 0) = 0$

Badanie określoności formy kwadratowej

Definicja 10.2.3. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$.

- i) *Minorem głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ wierszy i kolumn o tych samych indeksach.

ii) *Minorem wiodącym głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ ostatnich wierszy i kolumn. Oznaczamy go symbolem Δ_k .

Symbolem $D_{i_1 \dots i_k}$ oznaczamy minor główny stopnia k , powstały przez skreślenie wierszy i kolumn poza tymi o indeksach $i_1 < \dots < i_k$.

Przykład 10.2.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{bmatrix}$

minory wiodące główne: $\Delta_1 = D_{11} = 1$, $\Delta_2 = D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4$,

$\Delta_3 = D_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_4 = D_{1234} = \det A = 0$

minory główne: $D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = 12$, $D_{24} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = 0$

Twierdzenie 10.2.5 (Kryterium Sylwestera). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną.

i) A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne są dodatnie, tzn. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Delta_k > 0$.

ii) A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne parzystego stopnia są dodatnie, a nieparzystego ujemne, tzn. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} (-1)^k \Delta_k > 0$.

Bez dowodu.

Przykład 10.2.6. i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ jest ujemnie określona.

$\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\Delta_3 = \det A = -3 < 0$.

ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ jest półokreślona ujemnie, gdyż $\gamma(x_1, x_2) = -x_2^2 \leq 0$.

Uwaga 10.2.7. Z warunku $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Delta_k \geq 0$ nie wynika dodatnia półokreśloność A .

Twierdzenie 10.2.8. Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $A = A^T$.

- i) Forma kwadratowa γ jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne,
 tzn. $\forall 1 \leq k \leq n \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad D_{i_1 \dots i_k} \geq 0$.
- ii) Forma kwadratowa γ jest ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy minory główne macierzy A przyjmują następujące znaki
 $\forall 1 \leq k \leq n \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad (-1)^k D_{i_1 \dots i_k} \geq 0$.

Przykład 10.2.9. Forma kwadratowa $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3$ jest dodatnio półokreślona.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = \Delta_3 = 0,$$

$$D_2 = 0, D_3 = 1, D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, D_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Oczywiste bowiem $\gamma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^2 \geq 0$.

$\Delta_1 = D_{11}$
 $\Delta_2 = D_{12}$
 $\Delta_3 = D_{123}$

$\Rightarrow = 0$ wtedy $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Uwaga 10.2.10. i) Jeśli $\Delta_2 = D_{12} < 0$, to macierz jest nieokreślona!

ii) Rzeczywista macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ma n rzeczywistych wartości własnych (licząc z krotnościami).

Dowód. i) $\Delta_2 = D_{12}$ to minor stopnia 2. Jeśli $D_{12} = (-1)^2 D_{12} < 0$, to na mocy kryterium Sylwestera, macierz nie jest dodatnio określona ani ujemnie określona. Na mocy twierdzenia 10.2.8 nie jest półokreślona dodatnio ani półokreślona ujemnie.

ii) Dowód można znaleźć w [4]. \square

Twierdzenie 10.2.11 (Kryterium wartości własnych). Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $A = A^T$ oraz niech $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Wówczas forma kwadratowa γ jest

- i) dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i > 0$,
- ii) ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i < 0$,
- iii) dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i \geq 0$,
- iv) ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i \leq 0$,
- iv) nieokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i > 0 \wedge \lambda_j < 0$.

Dowód. Niech $\lambda \in \text{Spec}(A)$ oraz niech v będzie wektorem własnym odpowiadającym λ . Oczywiście $v \neq \mathbf{0}_V$, więc $|v| \neq 0$. Obliczamy $v^T A v = \gamma(v) = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \lambda |v|^2$. Zatem $\gamma(v) > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$, co dowodzi podpunktu i). Analogicznie w pozostałych przypadkach. \square

zadanie z tytułu!
 dod. lub ujem. ow
 + + +
 - + -
 NA
 POTEM
 PO
 DIAGONALIZACJI

Przykład 10.2.12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest dodatnio półokreślona.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -t(1-t)^2 + t = t(1 - (1-t)^2) = t(2t - t^2) = t^2(2-t)$$

$$\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\}$$