

TEMAT: *Zagadnienie własne operatora liniowego*

## 8.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

Niech  $K = \mathbb{R}$ .

Niech  $V = (V, +, K, \cdot)$  będzie przestrzenią liniową wymiaru  $n$ . Oznaczmy  $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$ . Endomorfizmy przestrzeni  $V$  nazywamy również *operatorami liniowymi*.

**Twierdzenie 8.1.1.** i) Zbiór  $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$  wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru  $n^2$ .

ii) Zbiór  $End(V) = (End(V), +, \circ)$  wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemiennej.

iii)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$

**Definicja 8.1.2.** Podprzestrzeń liniową  $U$  przestrzeni  $V$  nazywamy *niezmienniczą względem endomorfizmu  $\varphi \in End(V)$*  lub krótko  *$\varphi$ -niezmienniczą*, jeżeli

$$\varphi(U) \subset U, \quad \text{tzn.} \quad \forall u \in U \quad \varphi(u) \in U.$$

**Przykład 8.1.3.** 1) Niech  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ ,  $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

Zauważmy, że  $\varphi$  jest obrotem o kąt  $\frac{\pi}{2}$  wokół osi  $Oz$ .

Zatem dla  $(0, 0, t) \in U$  mamy  $\varphi(0, 0, t) = (0, 0, t) \in U$  i  $U$  jest  $\varphi$ -niezmiennicza.

2) Niech  $V$ ,  $\varphi \in End(V)$  dowolne,  $U = \text{Ker}\varphi$

Niech  $u \in U$ , wówczas  $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$ . Oczywiście  $\mathbf{0}_V \in U$ , bowiem  $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$ .

Zatem  $U$  jest  $\varphi$ -niezmiennicza.

### Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

Dla dowolnego endomorfizmu  $\varphi : V \rightarrow V$  i dla dowolnej podprzestrzeni  $U \subset V$ , mamy  $\varphi(U) \subset V$ . Gdy  $U$  jest  $\varphi$ -niezmiennicza mamy  $\varphi(U) \subset U$ , zatem restrykcja  $\varphi|_U : U \rightarrow U$ ,

czyli  $\varphi|_U \in \text{End}(U)$ .

Jeśli istnieje właściwa podprzestrzeń niezmiennicza  $U \subset V$ , to w odpowiednio dobranej bazie macierz  $A$  operatora  $\varphi$  ma prostszą postać. Bierzemy dowolną bazę  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  przestrzeni  $U$  i uzupełniamy ją do bazy przestrzeni  $V$ . Z warunku  $\varphi(c_i) \in U$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$  wynika, że  $A = \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right]$ , gdzie  $A_1 \in M_k(K)$ ,  $A_2 \in M_{n-k}(K)$ ,  $B \in M_{k \times (n-k)}(K)$ ,  $0 \in M_{(n-k) \times k}$ . Ponadto  $A_1$  to macierz  $\varphi|_U : U \rightarrow U$ .

Niech  $K = \mathbb{R}$  lub  $K = \mathbb{C}$ . Niech  $V = (V, +, K, \cdot)$  będzie przestrzenią liniową oraz  $\varphi \in \text{End}(V)$ .

**Definicja 8.1.4.** i) Liczbę  $\lambda \in \mathbb{R}$  nazywamy *wartością własną* endomorfizmu  $\varphi$ , jeżeli istnieje niezerowy wektor  $v \in V$  taki, że  $\varphi(v) = \lambda v$ . Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu  $\varphi$ , odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ .

ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu  $\varphi$  wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu  $\varphi$ .

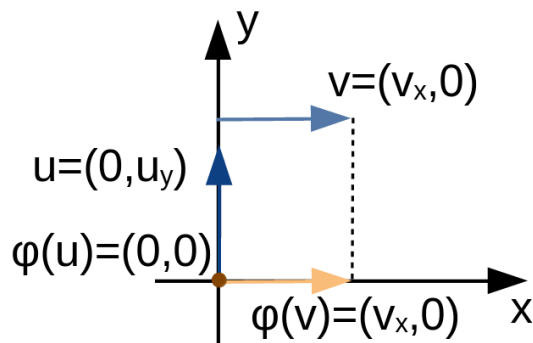
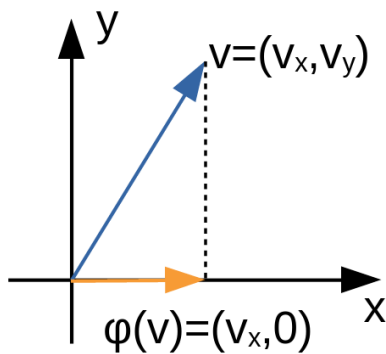
iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego  $\varphi$  oznaczamy symbolem  $\text{Spec}(\varphi)$  i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

**Uwaga 8.1.5.** Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

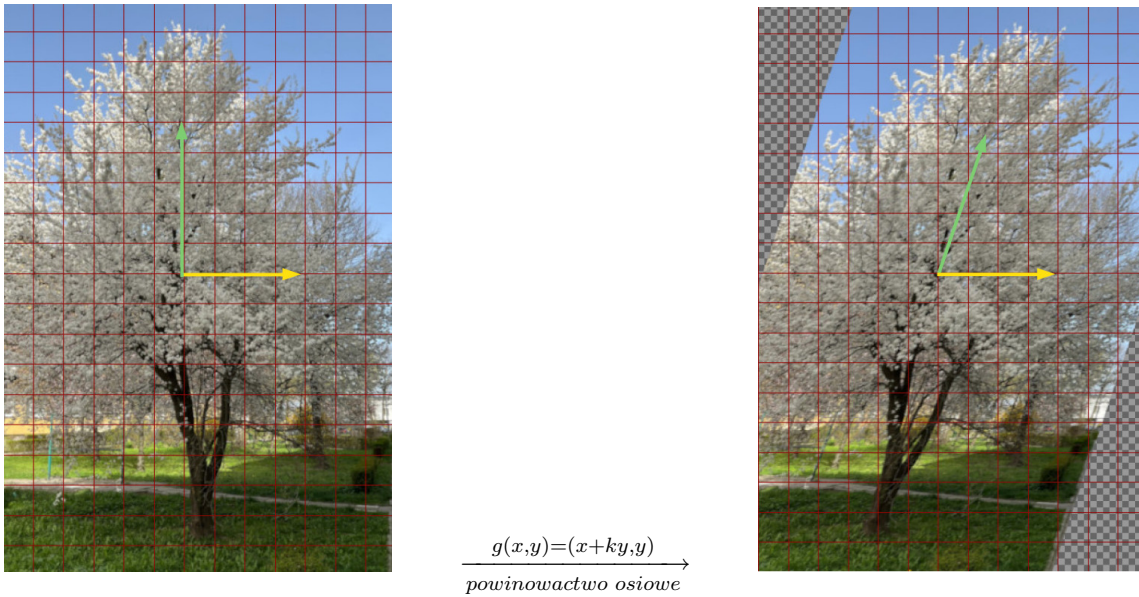
*Dowód.* Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu  $\varphi \in \text{End}(V)$  istnieją  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  oraz  $v \in V$ ,  $v \neq \mathbf{0}_V$  takie, że  $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$ . Wówczas  $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$ . Ponieważ  $v \neq \mathbf{0}_V$ , zatem  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , czyli  $\lambda_1 = \lambda_2$ .  $\square$

**Przykład 8.1.6.** Niech  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ , będzie rzutem prostokątnym na oś  $Ox$ . Rozważ zagadnienie własne dla operatora  $\varphi$ . Zauważmy, że  $\varphi(v) = \lambda v$ , gdy  $\varphi(v)$  ma ten sam kierunek co  $v$ , tj.  $\varphi(v) \in \text{lin}(v)$ . Zatem możliwe są dwie sytuacje:

- 1)  $\lambda_1 = 1$ ,  $\varphi(v) = v$ , gdy  $v \parallel Ox$ , czyli  $v = (v_x, 0)$
- 2)  $\lambda_2 = 0$ ,  $\varphi(v) = \mathbf{0}$ , gdy  $v \perp Ox$ , czyli  $v = (0, v_y)$



**Przykład 8.1.7.** Niech  $g \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$  to powinowactwo osiowe dane wzorem  $g(x, y) = (x + ky, y)$ , gdzie  $k \in \mathbb{R}$  to ustalona stała.



W wyniku działania przekształcenia  $g$  zielony wektor zmienia kierunek, zaś żółty wektor nie zmienia kierunku. Żółty wektor jest zatem wektorem własnym  $g \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ . Ponieważ długość żółtego wektora nie ulega zmianie, odpowiada on wartości własnej  $\lambda = 1$ .

**Przykład 8.1.8.** 1) Niech  $\varphi$  będzie endomorfizmem płaszczyzny danym wzorem  $\varphi(\vec{v}) = 3\vec{v}$ . Dowolny wektor jest wektorem własnym  $\varphi$  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda = 3$ .

2) Niech  $\varphi$  będzie rotacją na płaszczyźnie (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) o kąt  $\frac{\pi}{2}$ . Zatem  $\varphi(x, y) = (-y, x)$ . Nie istnieją niezerowe wektory, które w wyniku rotacji zachowują swój kierunek. Brak zatem wektorów własnych dla  $\varphi$ .

3) Niech  $V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  oraz  $\varphi = \frac{d}{dx}$ , tzn. dla dowolnego  $f \in V$  mamy  $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$ . Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora  $\frac{d}{dx}$ . Istotnie, niech  $\lambda \in \mathbb{R}$  będzie dowolne. Zdefiniujmy  $g_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ , gdzie  $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$ . Oczywiście  $g_\lambda \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Ponadto  $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$ . Zatem  $g_\lambda$  jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ . Stąd  $\text{Spec}(\varphi) = \mathbb{R}$ .

Wektory własne znajdują zastosowania na przykład w systemach rozpoznawania twarzy. Więcej informacji można znaleźć tutaj lub tutaj.

### Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu

Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczymy taką bazę przestrzeni liniowej  $V$ , że macierz endomorfizmu  $\varphi \in \text{End}(V)$  w tejże bazie będzie diagonalna.

Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych  $\varphi$ .

Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

Niech  $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$  będzie przestrzenią liniową oraz niech  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ . Oznaczmy przez  $E_\lambda$  zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej  $\lambda$ , uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

**Twierdzenie 8.1.9.** i) Zbiór  $E_\lambda$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $V$ .

ii) Zbiór  $E_\lambda$  jest podprzestrzenią  $\varphi$ -niezmienniczą.

iii)  $E_\lambda = \text{Ker}\psi$ , gdzie  $\psi = \varphi - \lambda \cdot \text{id}_V$ .

**Definicja 8.1.10.** Przestrzeń wektorową  $E_\lambda$  nazywamy *podprzestrzenią własną* endomorfizmu  $\varphi$ , odpowiadającą wartości własnej  $\lambda$ .

**Uwaga 8.1.11.** Na mocy uwagi 8.1.5 otrzymujemy  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_V\}$ . Zatem zamiast badać endomorfizm  $\varphi \in \text{End}(V)$ , możemy badać jego restrykcje  $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in \text{End}(E_{\lambda_i})$  na podprzestrzenie niezmiennicze  $E_{\lambda_i}$ , gdzie  $\lambda_i \in \text{Spec}(\varphi)$ .

**Twierdzenie 8.1.12.** Niech  $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$  będzie przestrzenią liniową oraz niech  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Niech  $A$  będzie macierzą odwzorowania  $\varphi$  w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni  $V$ . Wówczas następujące warunki są równoważne.

i)  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$

ii)  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

iii)  $\det(A - \lambda I) = 0$

**Wniosek 8.1.13.** Niech  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ . Niech  $\mathcal{B}$  będzie bazą przestrzeni  $V$  oraz  $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ . Wówczas wektor  $\mathbf{0}_V \neq v \in V$ ,  $v = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$  jest wektorem własnym endomorfizmu  $\varphi$ , odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

**Twierdzenie 8.1.14.** Wartości własne endomorfizmu  $\varphi \in \text{End}(V)$  nie zależą od wyboru bazy przestrzeni  $V$ .

**Definicja 8.1.15.** *Wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu  $\varphi \in \text{End}(V)$  nazywamy wielomian  $\chi_\varphi \in K[t]$  postaci  $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$ , gdzie  $A$  jest reprezentacją macierzową odwzorowania  $\varphi$  w pewnej bazie przestrzeni  $V$ . Równanie  $\chi_\varphi(t) = 0$  nazywamy *równaniem charakterystycznym* tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu  $\chi_\varphi$  nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi* odwzorowania  $\varphi$ .

**Uwaga 8.1.16.** i) Pierwiastki charakterystyczne wielomianu  $\chi_\varphi$  należące do ciała  $\mathbb{R}$  to wartości własne endomorfizmu  $\varphi$ .

ii) Na mocy twierdzenia 8.1.14 wielomian  $\chi_\varphi$  nie zależy od wyboru bazy przestrzeni  $V$ .

iii) Jeśli  $\dim V = n$ , to wówczas  $\deg \chi_\varphi = n$ .

Niech  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Definicja 8.1.17.** i) *Wielomianem charakterystycznym* macierzy  $A$  nazywamy wielomian  $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$  postaci  $\chi_A(t) = \det(A - tI)$ . Równanie  $\chi_A(t) = 0$  nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy  $A$ .

ii) Każdy pierwiastek wielomianu  $\chi_A$  należący do ciała  $K$  nazywamy *wartością własną* macierzy  $A$ . Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy  $A$  oznaczamy symbolem  $\text{Spec}(A)$  i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy *wektorem własnym* macierzy  $A$ , odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ .

**Uwaga 8.1.18.** Wartości i wektory własne endomorfizmu  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$  są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , będącej reprezentacją macierzową odwzorowania  $\varphi$  w bazie kanonicznej przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową  $n$ -wymiarową. Niech  $\varphi \in \text{End}(V)$  oraz  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ .

**Definicja 8.1.19.** i) Krotność  $k_\lambda$  liczby  $\lambda$  jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego  $\chi_\varphi$  nazywamy *krotnością algebraiczną* wartości własnej  $\lambda$ .

ii) Wymiar  $\dim E_\lambda$  podprzestrzeni własnej  $E_\lambda$  nazywamy *krotnością geometryczną* wartości własnej  $\lambda$ .

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy *prostymi*. Widmo składające się z  $n$  różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy *widmem prostym*.

**Twierdzenie 8.1.20.** Niech  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$  oraz niech  $A$  będzie reprezentacją macierzową  $\varphi$  w pewnej bazie przestrzeni  $V$ . Wówczas

i)  $1 \leq \dim E_\lambda \leq k_\lambda$ ,

ii)  $\dim E_\lambda = \dim V - \text{rank}(A - \lambda I)$ .

*Szkic dowodu.* i) Jeśli  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ , to istnieje  $v \in V$ ,  $v \neq \mathbf{0}_V$  taki, że  $v \in E_\lambda$ , zatem  $1 \leq \dim E_\lambda$ . Rozumowanie uzasadniające, że  $\dim E_\lambda \leq k_\lambda$  można znaleźć w [4].

ii) Ponieważ  $E_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)$ , zatem

$$\dim E_\lambda = \dim V - \dim \text{Im}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) = \dim V - \text{rank}(A - \lambda I). \quad \square$$

**Przykład 8.1.21.** Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu

$$\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z).$$

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t)$$

$\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  widmo proste

$E_{\lambda_3} = E_{-1} = ?$

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0, z \in \mathbb{R}$$

METODA I:

Wektory własne odpowiadające  $\lambda_3 = -1$  są postaci  $v = (0, 0, z)$ , gdzie  $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$E_{-1} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(0, 0, 1)\}$  oraz  $\dim E_{-1} = 1$

METODA II:

Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 8.1.20 ii), możemy obliczyć

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

METODA III:

Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 8.1.20 i) mamy

$1 \leq \dim E_{\lambda_3} \leq k_3 = 1$ , zatem  $\dim E_{\lambda_3} = 1$ .

Analogicznie wyznaczamy  $E_{\lambda_1}$  oraz  $E_{\lambda_2}$ . Z góry wiemy, że  $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

**Twierdzenie 8.1.22.** Niech  $V$  będzie skończone wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Niech  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \text{Spec}(A)$  oraz niech  $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$  będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ . Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

- i)  $\lambda^k \in \text{Spec}(A^k)$  dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , oraz  $v$  jest wektorem własnym odpowiadającym  $\lambda^k$ .

- ii)  $c \cdot \lambda \in \text{Spec}(c \cdot A)$  dla każdego  $c \in K$ , oraz  $v$  jest wektorem własnym odpowiadającym  $c \cdot \lambda$ .
- iii)  $p(\lambda) \in \text{Spec}(p(A))$  dla każdego wielomianu  $p \in K[X]$ , oraz  $v$  jest wektorem własnym odpowiadającym  $p(\lambda)$ .
- iv) Jeśli  $A$  jest nieosobliwa oraz  $\lambda \neq 0$ , to  $\frac{1}{\lambda} \in \text{Spec}(A^{-1})$  oraz  $v$  jest wektorem własnym odpowiadającym  $\frac{1}{\lambda}$ .
- v)  $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(A^T)$
- vi)  $A$  jest odwracalna  $\Leftrightarrow 0 \notin \text{Spec}(A)$ .

## 8.2 Diagonalizacja

**Twierdzenie 8.2.1.** Wektory własne operatora liniowego  $\varphi \in \text{End}(V)$  odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

**Twierdzenie 8.2.2.** Niech  $V$  będzie rzeczywistą przestrzenią liniową  $n$ -wymiarową oraz niech  $\varphi \in \text{End}(V)$ .

- i) Jeśli  $\varphi$  ma widmo proste  $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , to wektory własne  $v_1, \dots, v_n$ , gdzie  $v_i$  odpowiada  $\lambda_i$ , dla  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tworzą bazę przestrzeni  $V$ .
- ii) Jeśli wektory własne  $v_1, \dots, v_n \in V$  endomorfizmu  $\varphi$  (nie koniecznie odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni  $V$  oraz  $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$ , dla  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , to macierz przekształcenia  $\varphi$  w tejże bazie ma postać diagonalną

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

- iii) (Twierdzenie spektralne) Jeśli wielomian charakterystyczny  $\chi_\varphi$  rozkłada się na czynniki liniowe

$$\chi_\varphi = (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_p)^{k_p},$$

(tzn.  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , gdy  $i \neq j$  oraz  $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$ ) i ponadto  $k_i = \dim E_{\lambda_i}$ , dla  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , to wówczas istnieje baza przestrzeni  $V$  złożona z wektorów własnych endomorfizmu  $\varphi$ .

**Definicja 8.2.3.** Operator liniowy  $\varphi \in \text{End}(V)$  nazywamy *diagonalizowalnym*, gdy istnieje taka baza przestrzeni  $V$ , że macierz operatora  $\varphi$  w tejże bazie jest macierzą diagonalną.

**Wniosek 8.2.4.** Operator liniowy  $\varphi \in \text{End}(V)$  jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni  $V$  złożona z wektorów własnych  $\varphi$ . Dokładniej mówiąc,  $\varphi \in \text{End}(V)$ , gdzie  $\dim V = n$ , jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny ma  $n$  pierwiastków w ciele  $\mathbb{R}$  (licząc z krotnościami) oraz dla każdej wartości własnej można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

**Przykład 8.2.5.** Niech  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$  oraz  $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0.$$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem  $\text{Spec}(A) = \emptyset$  i nie istnieje baza  $\mathbb{R}^2$  złożona z wektorów własnych  $\varphi$ .

### Macierz diagonalizująca

**Definicja 8.2.6.** Mówimy, że macierze  $A, B \in M_n(K)$  są podobne, jeżeli istnieje macierz nieosobliwa  $C \in GL_n(K)$  taka, że  $A = C^{-1}BC$ .

**Twierdzenie 8.2.7** (o niezmiennikach macierzy podobnych). Jeżeli macierze  $A$  i  $B$  są podobne, to wówczas

- i)  $r(A) = r(B)$ ,
- ii)  $\det A = \det B$
- iii)  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

Jeżeli  $\varphi \in \text{End}(V)$ , to dla dowolnych baz  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  przestrzeni  $V$  macierze  $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B}), M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$  są podobne. Macierz ustanawiająca relację podobieństwa jest macierzą  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  zmiany bazy przestrzeni  $V$ .

**Definicja 8.2.8.** Macierz  $A \in M_n(K)$  nazywamy *diagonalizowalną*, gdy jest podobna do macierzy diagonalnej, tzn. istnieje macierz nieosobliwa  $P \in GL_n(K)$  taka, że macierz  $P^{-1}AP$  jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz  $P$  *diagonalizuje* macierz  $A$ .

**Wniosek 8.2.9.** Macierz  $A \in M_n(K)$  jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni  $K^n$  złożona z wektorów własnych  $A$ .

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

**Uwaga 8.2.10.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową z bazą kanoniczną  $\mathcal{B}$ . Niech  $\varphi \in \text{End}(V)$  będzie diagonalizowalny oraz niech  $\mathcal{B}'$  będzie bazą przestrzeni  $V$  złożoną z wektorów własnych  $\varphi$ . Oznaczmy  $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_k)$ ,  $D = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$  oraz  $P = P_{\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}'}$ . Wówczas



$$A = PDP^{-1}.$$

$$AX = PDP^{-1}X$$

przejście od bazy  
wektorów własnych  
do bazy kanonicznej

przejście od bazy  
kanonicznej do bazy  
wektorów własnych

macierz diagonalna  
Każda współrzędna wektora  
 $P^{-1}X$  jest mnożona przez stałą  
(będącą wartością własną).  
Zmiana każdej współrzędnej zależy tylko od  
niej samej, a nie od innych współrzędnych.

**Przykład 8.2.11.** Czy  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  jest diagonalizowalna?

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 \neq 0.$$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem  $Spec(A) = \emptyset$  i macierz rzeczywista  $A$  nie jest diagonalizowalna.

**Przykład 8.2.12.** Czy  $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$  taki, że  $\varphi(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$ ,  $\varphi(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$ ,  $\varphi(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$  jest diagonalizowalny?

Odczytujemy wartości własne i wektory własne

$$\lambda_1 = -1, v_1 = (1, 1, 1), \lambda_2 = 1, v_2 = (0, 1, 1), \lambda_3 = 2, v_3 = (0, 0, 1).$$

Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 8.2.2 i), operator  $\varphi$  jest diagonalizowalny.

**Przykład 8.2.13.** Czy  $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$  dany wzorem

$\varphi(x, y, z) = (3x + 8z, 3x - y + 6z, -2x - 5z)$  jest diagonalizowalny?

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3$$

$$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\}, k_1 = 3$$

$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \left\{ v = (x, y, z) : (A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim E_{-1} = 3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq k_1 = 3.$$

Endomorfizm  $\varphi$  nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza  $\mathbb{R}^3$  złożona z wektorów własnych  $\varphi$ .

**Przykład 8.2.14.** Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu  $f$  i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy  $f$  jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz  $D$  endomorfizmu  $f$  w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą  $P$ .

$$f \in \text{End}(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

$$\mathcal{B} = \left( E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ baza } M_2(\mathbb{R})$$

$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\chi_f(t) = \det(A - tI) = (2 - t) \begin{vmatrix} 1 - t & 1 & 0 \\ 1 & 1 - t & 0 \\ 0 & 0 & 2 - t \end{vmatrix} = (2 - t)^2 \begin{vmatrix} 1 - t & 1 \\ 1 & 1 - t \end{vmatrix} = (2 -$$

$$t)^2((1 - t)^2 - 1) = (2 - t)^2(t^2 - 2t) = -t(2 - t)^3$$

$$\text{Spec}(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}, \quad k_1 = 1, k_2 = 3, \dim E_0 = 1, 1 \leq \dim E_2 \leq 3$$

$$E_{\lambda_1} = E_0 = \text{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = O\}$$

$$\text{Niech } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ gdzie } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$$B + B^T = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ b + c = 0 \\ 2d = 0 \end{cases}$$

$$\text{Zatem } B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = E_2 = \text{Ker}(f - 2 \cdot \text{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = 2B\}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}}, \quad O_{2 \times 2} = [0, 0, 0, 0]_{\mathcal{B}}$$

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c, \quad a, b, d \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ b & d \end{array} \right] : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \right\}$$

$$\left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \text{ są liniowo niezależne } \Rightarrow \dim E_2 = 3$$

$$\text{Baza wektorów własnych } \mathcal{C} = \left( \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \right)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Przykład 8.2.15.** Rozważmy  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$  dany wzorem  $\varphi(x, y) = (4x + 2y, y - x)$ .  
Możemy wyliczyć  $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3\}$ .

Widmo jest proste, zatem  $\varphi$  jest diagonalizowalny.

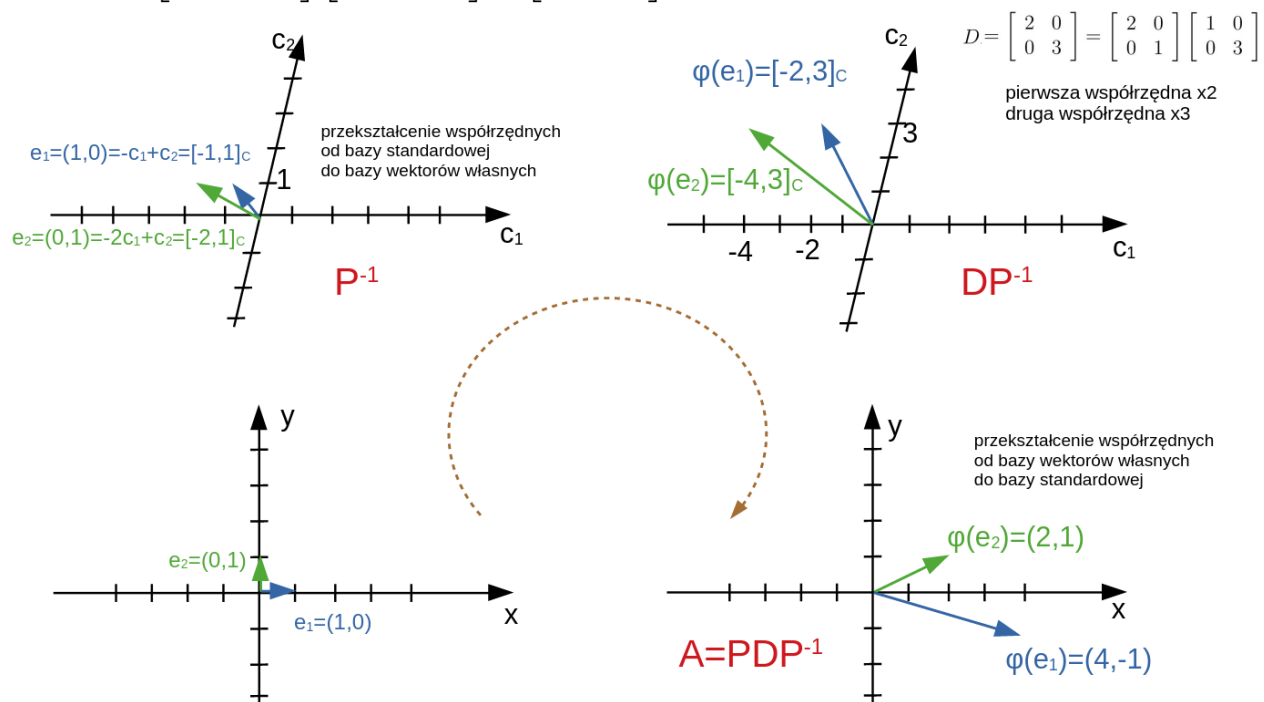
Układ  $\mathcal{C} = (v_1 = (1, -1), v_2 = (2, -1))$  jest bazą wektorów własnych.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, P = P_{\mathcal{B}_k^2 \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Obliczamy  $P^{-1} = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}_k^2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  oraz

$$DP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$



### 8.3 Zastosowania diagonalizacji

#### Znajdowanie wartości złożenia endomorfizmu

**Wniosek 8.3.1.** Niech  $V$  będzie rzeczywistą przestrzenią liniową  $n$ -wymiarową oraz niech  $\varphi \in \text{End}(V)$ . Niech  $\mathcal{B}$  będzie ustaloną bazą przestrzeni  $V$ . Jeśli wektory własne  $v_1, \dots, v_n$  odpowiadające wartościom własnym  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (niekoniecznie różnym), tworzą bazę  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$  przestrzeni  $V$ , to wówczas dla dowolnego  $r \in \mathbb{N}$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = PD^rP^{-1}, \quad \text{gdzie } P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

*Dowód.* Niech  $A = M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ ,  $D = M_{\varphi}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$  oraz  $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ . Wówczas  $A^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$  oraz  $D^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ . Ponadto  $D = P^{-1}AP$ , skąd  $A = PDP^{-1}$  oraz  $A^r = (PDP^{-1})^r = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{r\text{-razy}} = PD(P^{-1}P)D \dots (PP^{-1})DP^{-1} = PD^rP^{-1}$ .  $\square$

**Przykład 8.3.2.** Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu  $\varphi$  i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy  $\varphi$  jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz  $D$  endomorfizmu  $\varphi$  w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą  $P$ . Oblicz  $\varphi^{101}(1, 2, 3)$ .

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$$

$$A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \stackrel{w_2+2w_3}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \stackrel{k_3+k_2}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \stackrel{k_2+k_1}{=} \begin{vmatrix} 4-t & 2-t & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (4-t)(2-t)^2 - 3(2-t)^2 = (2-t)^2(1-t)$$

$\text{Spec}\varphi = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2\}$ ,  $k_1 = 1, k_2 = 2$ ,  $\dim E_1 = 1$ ,  $1 \leq \dim E_2 \leq 2$

$\varphi$  będzie diagonalizowalny, jeśli  $\dim E_2 = 2 = k_2$ .

$$\dim E_2 = 3 - r(A - 2I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

zatem  $\varphi$  jest diagonalizowalny.

Wyznamy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy  $\lambda_1 = 1$ .

$$(A - I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3-2w_1]{w_2-3w_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -2z, z \in \mathbb{R}$$

$$E_1 = \{(-2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(-2, -2, 1)\}$$

Rozważmy  $\lambda_2 = 2$ .

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x + y - z = 0 \Rightarrow z = y - x, x, y \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \{(x, y, y - x) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$$

Baza wektorów własnych  $\mathcal{C} = (v_1 = (-2, -2, 1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (0, 1, 1))$

$$D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ macierz diagonalizująca } P := P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczmy  $\varphi^{101}(1, 2, 3)$  na dwa różne sposoby.

METODA I: Wykorzystamy macierz  $D$ . Niech  $v := (1, 2, 3) = [a, b, c]_{\mathcal{C}}$ .

$$\text{Wówczas } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ skąd } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Obliczamy } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz } v = [2, 5, 6]_{\mathcal{C}}.$$

$$D^{101} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \cdot 2^{101} \\ 6 \cdot 2^{101} \end{bmatrix}$$

$$\varphi^{101}(v) = [2, 5 \cdot 2^{101}, 6 \cdot 2^{101}]_{\mathcal{C}} = 2v_1 + 5 \cdot 2^{101}v_2 + 6 \cdot 2^{101}v_3 = (-4 + 5 \cdot 2^{101}, -4 - 6 \cdot 2^{101}, 2 + 2^{101})$$

METODA II: Obliczamy

$$A^{101} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = PD^{101}P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 2^{101} - 2 & 2 - 2^{102} & 2^{102} - 2 \\ 2^{102} - 2 & 2 - 2^{101} & 2^{102} - 2 \\ 1 - 2^{101} & -1 + 2^{101} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 5 \cdot 2^{101} \\ -4 - 6 \cdot 2^{101} \\ 2 + 2^{101} \end{bmatrix}$$