Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

$\varphi : V \to V$

TEMAT: *Zagadnienie własne operatora liniowego*

to samo

$A = M_\varphi$

8.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

kwadratowa $m \times m$

tzn. $\dim V = m$

Niech $K = \mathbb{R}$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n. Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni V nazywamy również *operatorami liniowymi.*

liniowe

Twierdzenie 8.1.1. i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru n^2.

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemiennego.

bo składanie jest nieprzemienne

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$

struktury pr. wektorowej i pierścienia są ze sobą zgodne

Definicja 8.1.2. Podprzestrzeń liniową U przestrzeni V nazywamy *niezmienniczą względem endomorfizmu* $\varphi \in End(V)$ lub krótko *φ-niezmienniczą*, jeżeli

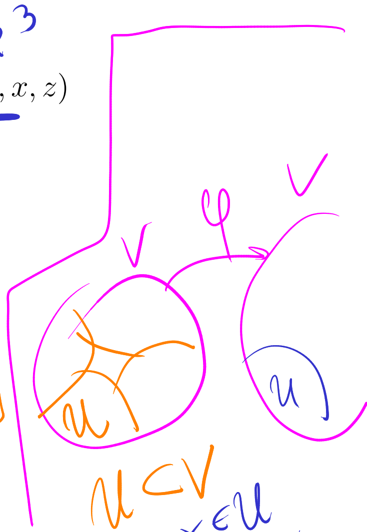
obraz U

$$\{\varphi(x) : x \in U\} =: \varphi(U) \subset U, \quad tzn. \quad \forall u \in U \ \varphi(u) \in U.$$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Przykład 8.1.3. 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

Zauważmy, że φ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz.
Zatem dla $(0, 0, t) \in U$ mamy $\varphi(0, 0, t) = (0, 0, t) \in U$ i U jest φ-niezmiennicza.

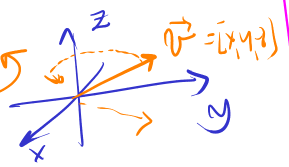


2) Niech V, $\varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \mathrm{Ker}\varphi$

$u \in U$

Niech $u \in U$, wówczas $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$. Oczywiście $\mathbf{0}_V \in U$, bowiem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$.
Zatem U jest φ-niezmiennicza.

o $\frac{\pi}{2}$ wokół Oz



Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

$\varphi(x) \in V$, $x \in U$

Dla dowolnego endomorfizmu $\varphi : V \to V$ i dla dowolnej podprzestrzeni $U \subset V$, mamy $\varphi(U) \subset V$. Gdy U jest φ-niezmiennicza mamy $\varphi(U) \subset U$, zatem restrykcja $\varphi|_U : U \to U$,

$f := \varphi|_U$ $\quad f \in End(U)$

$u = [x, y]$ $\quad u \circ v$
$v = [-y, x]$ $\quad = -xy + xy = 0$

$\mathbb{R}^3 \supset U \sim Oxy$
(x,y,z) $(x,y,0)$

czyli $\varphi|_U \in End(U)$.

Jeśli istnieje właściwa podprzestrzeń niezmiennicza $U \subset V$, to w odpowiednio dobranej bazie macierz A operatora φ ma prostszą postać. Bierzemy dowolną bazę $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ przestrzeni U i uzupełniamy ją do bazy przestrzeni V. Z warunku $\varphi(c_i) \in U$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ wynika, że $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$, gdzie $A_1 \in M_k(K), A_2 \in M_{n-k}(k), B \in M_{k\times(n-k)}(K), 0 \in M_{(n-k)\times k}$. Ponadto A_1 to macierz $\varphi|_U : U \to U$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz $\varphi \in End(V)$.

! robimy tylko przypadek $K = \mathbb{R}$!

Definicja 8.1.4. i) Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu φ, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\boxed{\varphi(v) = \lambda v}$. Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ.

ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu φ.

$\varphi(0) = \lambda \cdot 0$

iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symbolem $Spec(\varphi)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

Uwaga 8.1.5. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

Dowód. Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ takie, że $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$. Wówczas $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$. Ponieważ $v \neq \mathbf{0}_V$, zatem $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

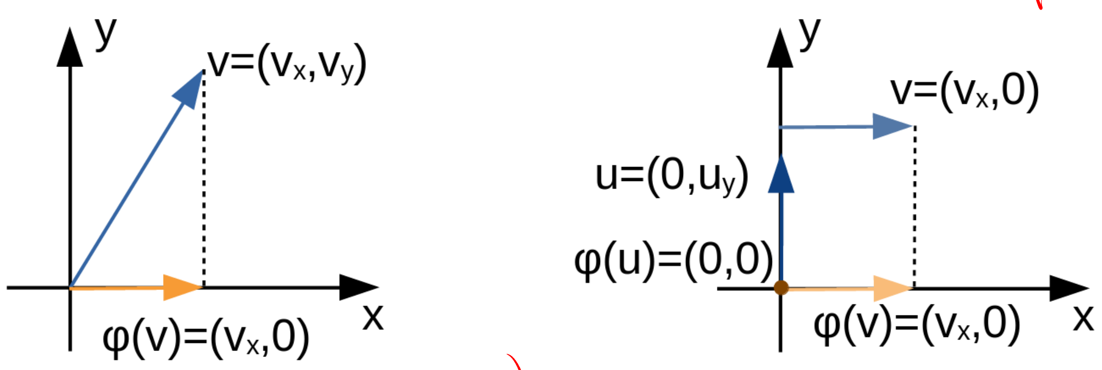
$v \neq \vec{0}$

Przykład 8.1.6. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś Ox. Rozważ zagadnienie własne dla operatora φ. Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co v, tj. $\varphi(v) \in \text{lin}(v)$. Zatem możliwe są dwie sytuacje:
1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = \mathbf{0}$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$

!

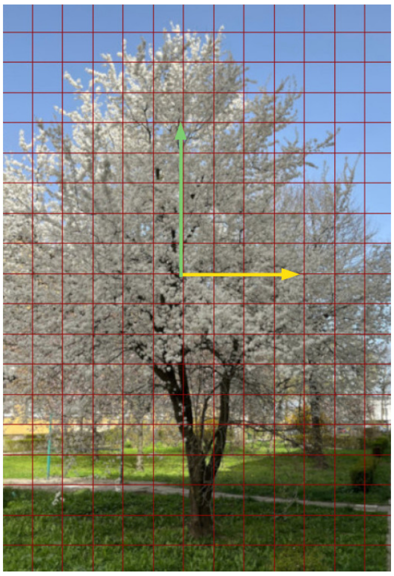
$\varphi(v) = \lambda \cdot v$

$v \neq 0$

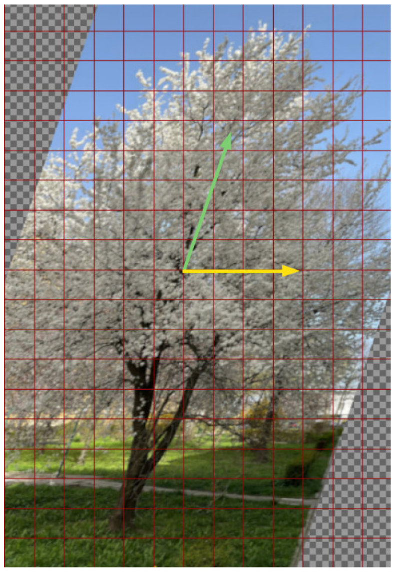


$\varphi(0, v_y) = (0,0) = 0 \cdot (0, v_y)$ $\quad \varphi(v_x, 0) = 1 \cdot (v_x, 0)$

Przykład 8.1.7. Niech $g \in End(\mathbb{R}^2)$ to powinowactwo osiowe dane wzorem $g(x, y) = (x + ky, y)$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ to ustalona stała.



$\xrightarrow[\text{powinowactwo osiowe}]{g(x,y)=(x+ky,y)}$



W wyniku działania przekształcenia g zielony wektor zmienia kierunek, zaś żółty wektor nie zmienia kierunku. Żółty wektor jest zatem wektorem własnym $g \in End(\mathbb{R}^2)$. Ponieważ długość żółtego wektora nie ulega zmianie, odpowiada on wartości własnej $\lambda = 1$.

Przykład 8.1.8. 1) Niech φ będzie endomorfizmem płaszczyzny danym wzorem $\varphi(\vec{v}) = 3\vec{v}$. Dowolny wektor jest wektorem własnym φ odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 3$.

$Spec(\varphi) = \{3\}$

$\varphi \in End(\mathbb{R})$

2) Niech φ będzie rotacją na płaszczyźnie (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) o kąt $\frac{\pi}{2}$. Zatem $\varphi(x, y) = (-y, x)$. Nie istnieją niezerowe wektory, które w wyniku rotacji zachowują swój kierunek. Brak zatem wektorów własnych dla φ.

$Spec\,\varphi = \emptyset$

gładkie

3) Niech $V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $\varphi = \frac{d}{dx}$, tzn. dla dowolnego $f \in V$ mamy $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$. Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora $\frac{d}{dx}$. Istotnie, niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Zdefiniujmy
$g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$. Oczywiście $g_\lambda \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Ponadto $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$. Zatem g_λ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Stąd $Spec(\varphi) = \mathbb{R}$.

popraw!

zb. wek. wł. $V \setminus \{\vec{0}\}$

Wektory własne znajdują zastosowania ~~na~~ przykład w systemach rozpoznawania twarzy. Więcej informacji można znaleźć tutaj lub tutaj.

$\varphi \quad M_\varphi(\mathcal{B}_u, \mathcal{B}_u) = A$

Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu
Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczymy taką bazę przestrzeni liniowej V, że macierz endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ w tejże bazie będzie diagonalna.
Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych φ. !

macierz diagonalna

$\mathcal{C}$ - nowa baza

$\mathcal{C}$? t.że $M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = D$

Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

$id : V \to V$

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ, uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

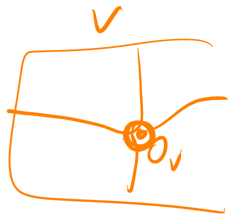
$\varphi(v) - \lambda \cdot v = 0$

$\varphi(v) - \lambda \cdot id(v) = 0$

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

dopuszczam $v = 0$

$[\varphi - \lambda \cdot id](v) = 0$



Twierdzenie 8.1.9. i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ-niezmienniczą.

iii) $E_\lambda = \mathrm{Ker}\psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

ψ !

Definicja 8.1.10. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy *podprzestrzenią własną* endomorfizmu φ, odpowiadającą wartości własnej λ.

Uwaga 8.1.11. Na mocy uwagi 8.1.5 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in End(V)$, możemy badać jego restrykcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in End(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze E_{λ_i}, gdzie $\lambda_i \in Spec(\varphi)$.

Twierdzenie 8.1.12. Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

$\exists v \neq 0 \quad \varphi(v) = \lambda v$

i) $\lambda \in Spec(\varphi)$

JAK WYLICZYĆ WARTOŚCI? I WEKTORY WŁASNE?

ii) $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

$\psi = \varphi - \lambda id$ liniowe

$\psi(0) = (0)$

!

iii) $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

Punkt wyjścia

Wniosek 8.1.13. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $\mathbf{0}_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \ldots, x_n]_\mathcal{B}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

$A = M_\varphi$ macierze kwadratowe $n \times n$ gdy $\dim V = n$

$A - \lambda I = M_\psi$

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Tw. o rzędzie

$\psi = \varphi - \lambda \cdot id$

$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\psi + \dim \mathrm{Im}\psi$

!

Twierdzenie 8.1.14. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V.

$\boxed{V \text{ ! }}$ $r(A - \lambda I) \leq n$

Definicja 8.1.15. *Wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in K[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V. Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu χ_φ nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi* odwzorowania φ.

dw

tzn $\det(A - \lambda I) = 0$

$A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ $\quad \det(A - \lambda I) = 0$ $\quad$ da to samo

$A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ $\quad \det(A' - \lambda I) = 0$

$\dim \mathrm{Ker}\psi \neq \{0\}$

tzn. $\dim \mathrm{Ker}\psi \geq 1$

$t^2+1=0$

Uwaga 8.1.16. i) Pierwiastki charakterystyczne wielomianu χ_φ należące do ciała $\mathbb{R}$ to wartości własne endomorfizmu φ. !

ii) Na mocy twierdzenia 8.1.14 wielomian χ_φ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V.

iii) Jeśli $\dim V = n$, to wówczas $\deg \chi_\varphi = n$.

to samo dla macierzy

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Definicja 8.1.17. i) *Wielomianem charakterystycznym* macierzy A nazywamy wielomian $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy A.

ii) Każdy pierwiastek wielomianu χ_A należący do ciała K nazywamy *wartością własną* macierzy A. Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy symbolem *Spec*(A) i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$\boxed{AX = \lambda X,} \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy *wektorem własnym* macierzy A, odpowiadającym wartości własnej λ.

Uwaga 8.1.18. Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{R}^n)$ są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, będącej reprezentacją macierzową odwzorowania φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

$\det(A-\lambda I)=0$

równanie wielomian

Niech V będzie przestrzenią liniową n-wymiarową. Niech $\varphi \in End(V)$ oraz $\lambda \in Spec(\varphi)$.

Definicja 8.1.19. i) Krotność k_λ liczby λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego χ_φ nazywamy *krotnością algebraiczną* wartości własnej λ.

ii) Wymiar $\boxed{\dim E_\lambda}$ podprzestrzeni własnej E_λ nazywamy $\boxed{\textit{krotnością geometryczną}}$ wartości własnej λ.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy *prostymi.* Widmo składające się z n różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy *widmem prostym.*

$A - \lambda I$

Twierdzenie 8.1.20. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$ oraz niech A będzie reprezentacją macierzową φ w pewnej bazie przestrzeni V. Wówczas

i) $1 \leq \dim E_\lambda \leq k_\lambda$, krotność geom. $\leq$ krotność algebr.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$

tw. o rzędzie

ii) $\underbrace{\dim E_\lambda}_{\dim \ker \varphi} = \dim V - \underbrace{\operatorname{rank}(A - \lambda I)}_{\dim \operatorname{Im} \varphi}$.

$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda)-6=0$

wielomian

$E_\lambda \ni 0_V \Rightarrow E_\lambda \neq \emptyset$

$\exists v$ wektor wł. t.że $v \in E_\lambda \wedge v \neq 0_V \Rightarrow \dim E_\lambda \geq 1$

Szkic dowodu. i) Jeśli $\lambda \in Spec(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $v \in E_\lambda$, zatem $1 \le \dim E_\lambda$. Rozumowanie uzasadniające, że $\dim E_\lambda \le k_\lambda$ można znaleźć w [4].
ii) Ponieważ $E_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$, zatem
$\dim E_\lambda = \dim V - \dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$. □

Przykład 8.1.21. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu λ

k

$$\varphi \in End(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x,y,z) = (x+2y, 2y, -2x-2y-z).$$

E_λ

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni. krotność geom

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\varphi(i)$ $\varphi(j)$ $\varphi(k)$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t) = 0$$

wielom. charakt. — równ. charakt.

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ widmo proste

$E_{\lambda_3} = E_{-1} = ?$

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

rząd = 2

jednorodny nigdy nie jest sprzeczny!

det ≠ 0 ozn

det = 0 nieozn

$\varphi(v) = \lambda_3 v$

λ_3

v? t.że $v \neq 0$ $\wedge$ $\varphi(v) = \lambda_3 v$

$\varphi(v) = -v$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0, z \in \mathbb{R}$$

$v = (x,y,z)$ układ nieozn!

$x = y = 0$ z-dowolne $\lambda_3 = -1$

$AX = \lambda_3 X$

$AX - \lambda_3 X = 0$

$(A - \lambda_3 I)X = 0$

METODA I:
Wektory własne odpowiadające $\lambda_3 = -1$ są postaci $v = (0,0,z)$, gdzie $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$E_{-1} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(0,0,1)\}$ oraz $\dim E_{-1} = 1$ ← krotność geom.

baza

METODA II:
Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 8.1.20 ii), możemy obliczyć

$\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim V - \dim \operatorname{Im}\varphi$

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A + I) = 3 - r\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

tw. o rzędzie

TEST

liczenie dim E_{λ_3}

METODA III:
Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 8.1.20 i) mamy
$1 \le \dim E_{\lambda_3} \le k_3 = 1$, zatem $\dim E_{\lambda_3} = 1$.

WIDMO PROSTE

Analogicznie wyznaczamy E_{λ_1} oraz E_{λ_2}. Z góry wiemy, że $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

Twierdzenie 8.1.22. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in Spec(A)$ oraz niech $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\lambda^k \in Spec(A^k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}, k \ge 2$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym λ^k.

NA ĆW!

ii) $c\cdot\lambda \in Spec(c\cdot A)$ dla każdego $c \in K$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $c\cdot\lambda$.

iii) $p(\lambda) \in Spec\big(p(A)\big)$ dla każdego wielomianu $p \in K[X]$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $p(\lambda)$.

iv) Jeśli A jest nieosobliwa oraz $\lambda \neq 0$, to $\frac{1}{\lambda} \in Spec(A^{-1})$ oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $\frac{1}{\lambda}$.

v) $Spec(A) = Spec(A^T)$

vi) A jest odwracalna $\Leftrightarrow 0 \notin Spec(A)$. ! do rachunków

8.2 Diagonalizacja

! **Twierdzenie 8.2.1.** Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in End(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Twierdzenie 8.2.2. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$.

krotność alg = 1

i) Jeśli φ ma widmo proste $Spec(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \ldots, v_n$, gdzie v_i odpowiada λ_i, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tworzą bazę przestrzeni V. WN

ii) Jeśli wektory własne $v_1, \ldots, v_n \in V$ endomorfizmu φ (nie koniecznie odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni V oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to macierz przekształcenia φ w tejże bazie ma postać diagonalną

DIAGONALNA

$$M_\varphi(C,C) = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

C - baza wektorów wł

$C = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

$\varphi(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 =$

$= \lambda_1 v_1 + 0\cdot v_2 + \ldots + 0 v_n$

$[\lambda_1, 0, \ldots, 0]_C$

$\varphi(v_1)$ w bazie C

iii) (Twierdzenie spektralne) Jeśli wielomian charakterystyczny χ_φ rozkłada się na czynniki liniowe

$\chi_\varphi(t) = \det(A - t\cdot I)$

$$\chi_\varphi = (t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\ldots(t-\lambda_p)^{k_p},$$

licząc z krotnościami jest n pierwiastków

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$) i ponadto $\boxed{k_i = \dim E_{\lambda_i}}$, dla $i \in \{1, 2 \ldots, p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ.

$n = \dim V$ $\quad 1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq k_{\lambda_i}$

Definicja 8.2.3. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ nazywamy *diagonalizowalnym*, gdy istnieje taka baza przestrzeni V, że macierz operatora φ w tejże bazie jest macierzą diagonalną.

Wniosek 8.2.4. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ. Dokładniej mówiąc, $\varphi \in End(V)$, gdzie $\dim V = n$, jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny ma n pierwiastków w ciele $\mathbb{R}$ (licząc z krotnościami) oraz dla każdej wartości własnej można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

kr. geom = kr. alg.

Przykład 8.2.5. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

det(A - tI)

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0.$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $Spec(A) = \varnothing$ i nie istnieje baza $\mathbb{R}^2$ złożona z wektorów własnych φ. → NIE JEST DIAGONALIZOW.

Macierz diagonalizująca

A, A' — $\boxed{A' = P^{-1}AP}$ P – macierz przejścia

Definicja 8.2.6. Mówimy, że macierze $A, B \in M_n(K)$ *są podobne*, jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $C \in GL_n(K)$ taka, że $A = C^{-1}BC$.

Twierdzenie 8.2.7 (o niezmiennikach macierzy podobnych)**.** Jeżeli macierze A i B są podobne, to wówczas

i) $r(A) = r(B)$,

ii) $\det A = \det B$

iii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ ← ślad | suma elem. na przekątnej

Jeżeli $\varphi \in End(V)$, to dla dowolnych baz $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni V macierze $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ są podobne. Macierz ustanawiająca relację podobieństwa jest macierzą $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ ($= C$) zmiany bazy przestrzeni V.

Definicja 8.2.8. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *diagonalizowalną*, gdy jest podobna do macierzy diagonalnej, tzn. istnieje macierz nieosobliwa $P \in GL_n(K)$ taka, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz P *diagonalizuje* macierz A.

! **Wniosek 8.2.9.** Macierz $A \in M_n(K)$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni K^n złożona z wektorów własnych A.

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

Uwaga 8.2.10. Niech V będzie przestrzenią liniową z bazą kanoniczną $\mathcal{B}$. Niech $\varphi \in End(V)$ będzie diagonalizowalny oraz niech $\mathcal{B}'$ będzie bazą przestrzeni V złożoną z wektorów własnych φ. Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_k)$, $D = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ oraz $P = P_{\mathcal{B}_k \to \mathcal{B}'}$. Wówczas

$A = PDP^{-1}$.

AX=PDP⁻¹X

przejcie od bazy wektorów własnych do bazy kanonicznej

przejcie od bazy kanonicznej do bazy wektorów własnych

macierz diagonalna
Każda współrzędna wektora $P^{-1}X$ jest mnożona przez stałą (będącą wartością własną).
Zmiana każdej współrzędnej zależy tylko od niej samej, a nie od innych współrzędnych.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot x \\ 2\cdot y \end{bmatrix}$ $A' = D$

$P\cdot \backslash\ A' = P^{-1}AP$

$PA' = AP \ /\cdot P^{-1}$

$P\underbrace{A'}_{D}P^{-1} = A$

$PDP^{-1} = A$

Przykład 8.2.11. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

$\Delta = 9 - 4\cdot 1\cdot 5 < 0$

$\det(A - t\cdot I) = \chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 \neq 0.$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $Spec(A) = \emptyset$ i macierz rzeczywista A nie jest diagonalizowalna.

TEST!

Przykład 8.2.12. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\underset{b_1}{\varphi(1,1,1)} = \underset{= -1\cdot b_1}{(-1,-1,-1)}$, $\underset{b_2}{\varphi(0,1,1)} = \underset{= 1\cdot b_2}{(0,1,1)}$, $\underset{b_3}{\varphi(0,0,1)} = \underset{= 2\cdot b_3}{(0,0,2)}$ jest diagonalizowalny?

$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Odczytujemy wartości własne i wektory własne
$\lambda_1 = -1$, $\underset{b_1}{v_1} = (1,1,1)$, $\lambda_2 = 1$, $\underset{b_2}{v_1} = (0,1,1)$, $\lambda_3 = 2$, $\underset{b_3}{v_1} = (0,0,1)$.
Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 8.2.2 i), operator φ jest diagonalizowalny.

$k_1 = k_2 = k_3 = 1$

$\dim E_{\lambda_1} = 1$
$\dim E_{\lambda_2} = 1$
$\dim E_{\lambda_3} = 1$

Przykład 8.2.13. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem
$\varphi(x,y,z) = (3x + 8z, 3x - y + 6z, -2x - 5z)$ jest diagonalizowalny?

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

tw. Laplace'a

$$\det(A - tI) = \chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$
$$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3$$

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\}$, $k_1 = 3$

dla $\lambda_1 = -1$

układ nieoznaczony

$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \{v = (x,y,z) : (A+I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$A - \lambda_1\cdot I$

$$\dim \operatorname{Ker}\psi = \dim E_{-1} = \underset{\dim \mathbb{R}^3}{3} - r(A+I) = 3 - r\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{6} \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{-4} \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq \underset{\dim E_{-1}}{k_1} = 3.$$

$\psi = \varphi - \lambda\cdot id$) $-\dim Im\,\psi$ tj. $r(\psi)$ tj. $r(A+I)$

Endomorfizm φ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych φ.

Przykład 8.2.14. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu f w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.

$\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

$$f \in End(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \text{ baza } M_2(\mathbb{R})$$

$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [2,0,0,0]_{\mathcal{B}}$$

$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0,1,1,0]_{\mathcal{B}}$$

$$M_2(\mathbb{R}) \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rów. charakt.

$$\chi_f(t) = \det(A - tI) = (2-t)\begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)^2\big((1-t)^2 - 1\big) = (2-t)^2(t^2-2t) = -t(2-t)^3$$

$Spec(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}$, $k_1 = 1, k_2 = 3$, $\dim E_0 = 1$, $1 \le \dim E_2 \le 3$

$\dim E_0 \le k_1 = 1$

$E_{\lambda_1} = E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = O\}$

$AX = 0$

$(A - 0 \cdot I)X = 0$

AX

Niech $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$B + B^T = O \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{B^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{O} \Rightarrow \begin{cases} 2a & = 0 \\ b + c & = 0 \\ 2d & = 0 \end{cases}$$

B_1

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Zatem $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ oraz $E_0 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{lin}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$E_{\lambda_2} = E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2 \cdot \mathrm{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = 2B\}$

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}}$, $O_{2\times 2} = [0, 0, 0, 0]_{\mathcal{B}}$

$(A - 2I)X = 0$

$AX = 2X$

$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$

$$(A - 2I)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c, \quad a, b, d \in \mathbb{R}$$

$B + B^T = 2B$

$b = c$

$B_2 \quad B_3 \quad B_4$

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne $\Rightarrow$ $\dim E_2 = 3$

ustalona kolejność

$C = (B_2, B_3, B_4, B_1)$

$B_1 \quad \lambda = 0$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

baza uporządkowana

$B_2 \quad B_3 \quad B_4$

$D \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{\mathcal{B} \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$

$B_1 \quad B_4$

macierz diagonalizująca

Przykład 8.2.15. Rozważmy $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (4x + 2y, y - x)$. Możemy wyliczyć $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3\}$.
Widmo jest proste, zatem φ jest diagonalizowalny.
Układ $\mathcal{C} = \big(v_1 = (1, -1), v_2 = (2, -1)\big)$ jest bazą wektorów własnych.

$D = P^{-1}AP$

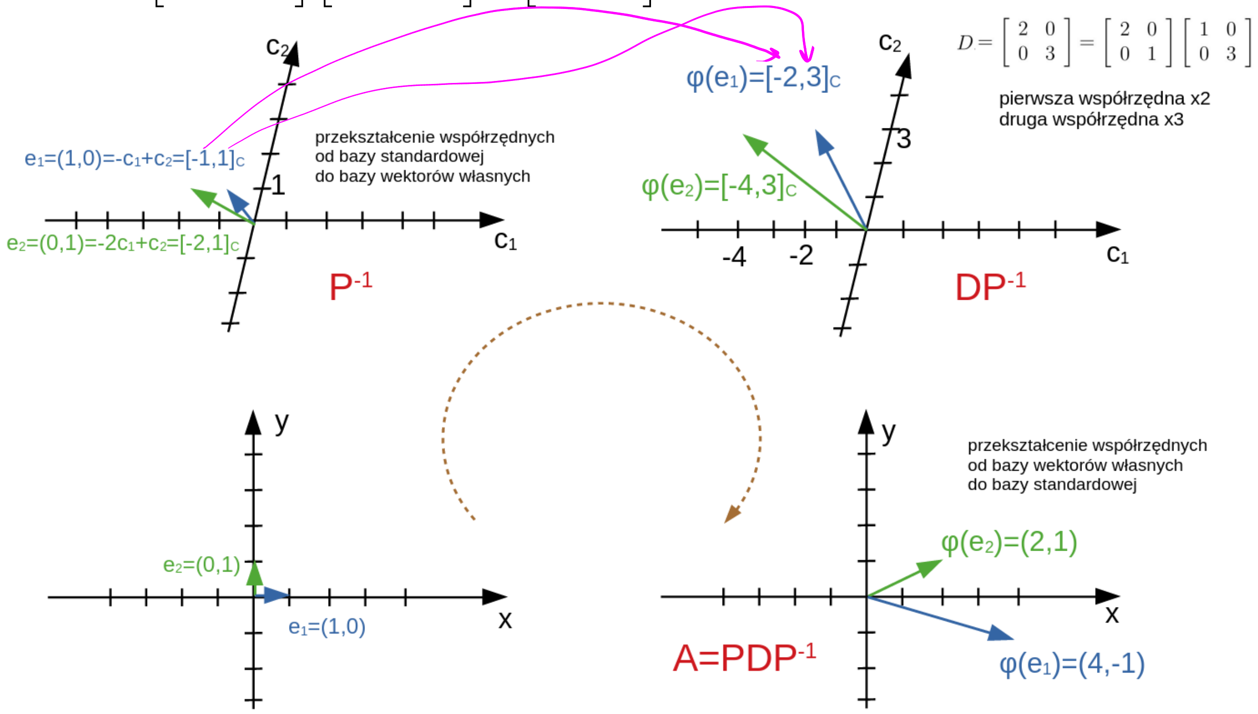
$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \; P = P_{\mathcal{B}_k^2 \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \; D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = PDP^{-1}$

Obliczamy $P^{-1} = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}_k^2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz

$$DP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$



$\underbrace{\varphi\circ\varphi\circ\ldots\circ\varphi}_{m}$ $\quad A^m \quad \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m}$

8.3 Zastosowania diagonalizacji

Znajdowanie wartości złożenia endomorfizmu

Wniosek 8.3.1. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V. Jeśli wektory własne $v_1 \ldots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = (v_1 \ldots, v_n)$ przestrzeni V, to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B},\mathcal{B}) = PD^rP^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dowód. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{B})$, $D = M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C})$ oraz $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$. Wówczas $A^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{B},\mathcal{B})$ oraz $D^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{C},\mathcal{C})$. Ponadto $\boxed{D = P^{-1}AP}$, skąd $\boxed{A = PDP^{-1}}$ oraz $A^r = (PDP^{-1})^r = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1})}_{r-razy} = PD(\underbrace{P^{-1}P}_{I})D\ldots(\underbrace{PP^{-1}}_{I})DP^{-1} = PD^rP^{-1}$. $\square$

mnożenie macierzy jest łączne

Przykład 8.3.2. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P. Oblicz $\varphi^{101}(1,2,3)$.

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^3_k) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

~~CW~~

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{w_2+2w_3}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{k_3+k_2}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \overset{k_2+k_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 4-t & 2-t & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (4-t)(2-t)^2 - 3(2-t)^2 = (2-t)^2(1-t)$$

$Spec\varphi = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2\}$, $\quad k_1 = 1,\ k_2 = 2,\quad \dim E_1 = 1, \quad 1 \le \dim E_2 \le 2$

φ będzie diagonalizowalny, jeśli $\dim E_2 = 2 = k_2$.

$$\dim E_2 = 3 - r(A - 2I) = 3 - r\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

OK diagonalizowalna

zatem φ jest diagonalizowalny.

Wyznaczymy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = 1$.

$$(A - I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-2w_1]{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x-y &= 0 \\ y+2z &= 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = y = -2z,} \; z \in \mathbb{R}$$

$E_1 = \{(-2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(-2,-2,1)\}$

Rozważmy $\lambda_2 = 2$.

$$(A-2I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x + y - z = 0 \Rightarrow \boxed{z = y - x,} \; x, y \in \mathbb{R}$

$E_2 = \{(x, y, y-x) : x, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \big(v_1 = (-2,-2,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,1)\big)$

$D = M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, macierz diagonalizująca $P := P_{\mathcal{B}^3_k \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 1$ $\quad \lambda = 2$

!

Obliczymy $\varphi^{101}(1,2,3)$ na dwa różne sposoby.

METODA I: Wykorzystamy macierz D. Niech $v := (1,2,3) = [a,b,c]_\mathcal{C}$.

$X = PX'$

Wówczas $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, skąd $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$X \qquad = PX'$

$D = M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C})$

Obliczamy $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $v = [2,5,6]_\mathcal{C}$.

$$D^{101}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^{101} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \cdot 2^{101} \\ 6 \cdot 2^{101} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

!

$\varphi^{101}(v) = [2, 5\cdot 2^{101}, 6\cdot 2^{101}]_\mathcal{C} = 2v_1 + 5\cdot 2^{101} v_2 + 6 \cdot 2^{101} v_3 =$
$= (-4 + 5\cdot 2^{101}, -4 - 6\cdot 2^{101}, 2 + 2^{101})$

$\uparrow$ w bazie $\mathcal{B}^3_k = (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

mnożenie!

METODA II: Obliczamy

$$A^{101}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = PD^{101}P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3\cdot 2^{101} - 2 & 2 - 2^{102} & 2^{102} - 2 \\ 2^{102} - 2 & 2 - 2^{101} & 2^{102} - 2 \\ 1 - 2^{101} & -1 + 2^{101} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 5\cdot 2^{101} \\ -4 - 6\cdot 2^{101} \\ 2 + 2^{101} \end{bmatrix}$$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 9
Data: ....

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe*

9.1 Iloczyn skalarny i norma

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 9.1.1. Funkcję $s : V \times V \to \mathbb{R}$ nazywamy *iloczynem skalarnym (iloczynem wewnętrznym)*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w)$, liniowe ze względu na pierwszą zmienną

ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u)$, symetria

ii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$.

Parę (V, s) nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*. Bywa ona oznaczana symbolem E. Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $u \circ v$ lub $\langle u, v \rangle$.

często w $\mathbb{R}^n$ — w abstrakcyjnej prz. liniowej

$\langle u/v \rangle$
(u, v)
(u/v)

Przykład 9.1.2. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) *Standardowym iloczynem skalarnym w* $\mathbb{R}^n$ nazywamy $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taką, że $\forall u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad u \circ v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$
Przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \circ)$ oznaczamy symbolem $\mathbb{E}^n$.

2) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in V \quad \boxed{\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx}$

Całka oznaczona ma własność liniowości. Ponadto $\int_a^b f^2(x) dx \geq 0$, bowiem $f^2(x) \geq 0$ i całka oznaczona zachowuje nierówność słabą.

3) $V = \mathbb{R}_n[x], \quad \langle ., . \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$,
$\forall p, q \in V \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) q(x_i)$, gdzie $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ liczby ustalone
$n+1$ liczb różnych

Rozważmy $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$.
Wówczas $\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0$.
Jeśli $\langle p, p \rangle = 0$, to oczywiście $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Nie oznacza to jeszcze, że p jest wielomianem zerowym.

Niech $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Załóżmy, że $\langle p, p\rangle = 0$. Wówczas $p(x_0) = p(x_1) = \ldots = p(x_n) = 0$, skąd otrzymujemy $\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ & \ldots & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Wyznacznik główny W tego układu, to wyznacznik macierzy Vandermonde'a. WIKIPEDIA !
$W = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i) \neq 0$, bowiem $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zatem jest to układ oznaczony jednorodny, jego jedynym rozwiązaniem jest $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, co oznacza, że p jest wielomianem zerowym.

4) $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\quad \langle .,. \rangle : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$

ślad (trace) - suma elementów na diagonali w macierzy $A \cdot B^T$

Na mocy twierdzenia 3.1.14, mówiącego o własnościach śladu macierzy, można wywnioskować, że jest to iloczyn skalarny.

Twierdzenie 9.1.3. Niech (V, s) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w)$,

ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0$, bo symetria

iii) $\forall u, v \in V \quad \boxed{\Big(s(u, v)\Big)^2 \le s(u, u) \cdot s(v, v)}$ *nierówność Schwarza* !

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Definicja 9.1.4. Funkcję $||.|| : V \to \mathbb{R}$ nazywamy *normą*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

długość wektora

i) $\forall v \in V \quad ||v|| \ge 0 \quad \wedge \quad ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$,

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$,

iii) $\forall u, v \in V \quad ||u + v|| \le ||u|| + ||v||$. $\quad$ tzw. warunek trójkąta

Liczbę $||v|| \ge 0$ nazywamy *normą (lub długością) wektora* v. Parę $(V, ||.||)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Twierdzenie 9.1.5. Jeśli (V, s) jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie $||.||_s : V \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\forall v \in V \quad \boxed{||v||_s = \sqrt{s(v, v)}} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

jest normą w przestrzeni V. Mówimy, że jest to *norma określona przez iloczyn skalarny.*

Przykład 9.1.6. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^n$, tj. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mamy $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Jest to tzw. *norma euklidesowa* w $\mathbb{R}^n$.

(z il. skalarnym) (z normą)

Wniosek 9.1.7. Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną.

Np. $\vec{a} = [1, 2, 3]$

$\vec{a} \circ \vec{a} = [1, 2, 3] \circ [1, 2, 3] = 1^2 + 2^2 + 3^2 = |\vec{a}|^2$ $\qquad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$

9.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.

Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy *unormowanym* lub *wersorem*. Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować, tj. znaleźć wersor $\hat{v}$ o tym samym zwrocie i kierunku co v.
Istotnie $\hat{v} := \frac{v}{||v||}$ jest wersorem, bowiem $||\hat{v}|| = \left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \left|\frac{1}{||v||}\right| \cdot ||v|| = \frac{1}{||v||} \cdot ||v|| = 1.$

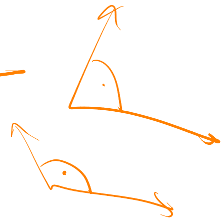
dł. wektora

Miara kąta między wektorami

wart. bezwzgl. / moduł w $\mathbb{R}$

W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarza dla dowolnych $u, v \in V$ mamy
$$|\langle u,v\rangle| \leq \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = ||u|| \cdot ||v|| \;\Rightarrow\; \frac{|\langle u,v\rangle|}{||u||\cdot||v||} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||} \leq 1.$$
Jeśli $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$, możemy widzieć $\frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||}$ jako cosinus jednoznacznie określonego kąta $\alpha \in [0, \pi]$. Definiujemy kąt między wektorami u i v jako α. Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem

liczba



$$\cos\measuredangle(u,v) = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||}, \quad \measuredangle(u,v) = \arccos\frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym $\mathbf{0}_V$ a innym wektorem jest nieokreślony.

Przykład 9.2.1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}_1[x], \langle .,. \rangle)$, gdzie $\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wyznaczymy miarę kąta pomiędzy wektorami $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$.

$\langle u,v\rangle = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\alpha$

$\mathbb{R}_1[x] = \{p = ax + b\}$

$$\begin{aligned}
\langle u,v\rangle &= u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2\cdot 5 + 2\cdot 4 = 18\\
||u|| &= \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}\\
||v|| &= \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}\\
\alpha = \measuredangle(u,v) &= \arccos\tfrac{18}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{41}} = \arccos\tfrac{9}{\sqrt{82}}
\end{aligned}$$

Definicja 9.2.2. i) Dwa wektory u, v nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$.

ii) Układ wektorów $\{v_1, \ldots v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli
$$\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \quad i \neq j \;\Rightarrow \langle v_i, v_j\rangle = 0.$$

ii) Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli
$$\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \quad \langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}.$$

Uwaga 9.2.3. Wektor zerowy $\mathbf{0}_V$ jest ortogonalny do każdego wektora.