

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe*

9.1 Iloczyn skalarny i norma

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 9.1.1. Funkcję $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *iloczynem skalarnym (iloczynem wewnętrznym)*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

- i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w),$
- ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u),$
- ii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V.$

Parę (V, s) nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*. Bywa ona oznaczana symbolem E . Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $u \circ v$ lub $\langle u, v \rangle$.

Przykład 9.1.2. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) *Standardowym iloczynem skalarnym w \mathbb{R}^n* nazywamy $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\forall u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad u \circ v = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Przestrzeń euklidesową (\mathbb{R}^n, \circ) oznaczamy symbolem \mathbb{E}^n .

2) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in V \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Całka oznaczona ma własność liniowości. Ponadto $\int_a^b f^2(x)dx \geq 0$, bowiem $f^2(x) \geq 0$ i całka oznaczona zachowuje nierówność słabą.

3) $V = \mathbb{R}_n[x], \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R},$
 $\forall p, q \in V \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^n p(x_i)q(x_i),$ gdzie $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ liczby ustalone

Rozważmy $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wówczas $\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0$.
Jeśli $\langle p, p \rangle = 0$, to oczywiście $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Nie oznacza to jeszcze, że p jest wielomianem zerowym.

Niech $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Załóżmy, że $\langle p, p \rangle = 0$. Wówczas $p(x_0) = p(x_1) = \dots = p(x_n) = 0$, skąd otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik główny W tego układu, to wyznacznik macierzy Vandermonde'a.

$W = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$, bowiem $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zatem jest to układ oznaczony jednorodny, jego jedynym rozwiązaniem jest $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, co oznacza, że p jest wielomianem zerowym.

4) $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$

Na mocy twierdzenia 3.1.14, mówiącego o własnościach śladu macierzy, można wnioskować, że jest to iloczyn skalarny.

Twierdzenie 9.1.3. Niech (V, s) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

- i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w)$,
- ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0$,
- iii) $\forall u, v \in V \quad (s(u, v))^2 \leq s(u, u) \cdot s(v, v) \quad \text{nierówność Schwarz}$

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Definicja 9.1.4. Funkcję $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *normą*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

- i) $\forall v \in V \quad \|v\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$,
- ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$,
- iii) $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$ tzw. warunek trójkąta

Liczbę $\|v\| \geq 0$ nazywamy *normą (lub długością) wektora v* . Parę $(V, \|\cdot\|)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Twierdzenie 9.1.5. Jeśli (V, s) jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie $\|\cdot\|_s : V \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\forall v \in V \quad \|v\|_s = \sqrt{s(v, v)}$$

jest normą w przestrzeni V . Mówimy, że jest to *norma określona przez iloczyn skalarny*.

Przykład 9.1.6. Rozważmy przestrzeń \mathbb{E}^n , tj. \mathbb{R}^n ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mamy $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Jest to tzw. *norma euklidesowa* w \mathbb{R}^n .

Wniosek 9.1.7. Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną.

9.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy *unormowanym* lub *wersorem*. Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować, tj. znaleźć wersor \hat{v} o tym samym zwrocie i kierunku co v .

Istotnie $\hat{v} := \frac{v}{\|v\|}$ jest wersorem, bowiem $\|\hat{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$.

Miara kąta między wektorami

W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarz'a dla dowolnych $u, v \in V$ mamy

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|u\| \cdot \|v\| \Rightarrow \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Jeśli $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$, możemy widzieć $\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ jako cosinus jednoznacznie określonego kąta $\alpha \in [0, \pi]$. Definiujemy kąt między wektorami u i v jako α . Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}, \quad \angle(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym $\mathbf{0}_V$ a innym wektorem jest nieokreślony.

Przykład 9.2.1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}_1[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wyznamy miarę kąta pomiędzy wektorami $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$.

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18 \\ \|u\| &= \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ \|v\| &= \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \\ \angle(u, v) &= \arccos \frac{18}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}} \end{aligned}$$

Definicja 9.2.2. i) Dwa wektory u, v nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$.

ii) Układ wektorów $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

ii) Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}.$$

Uwaga 9.2.3. Wektor zerowy $\mathbf{0}_V$ jest ortogonalny do każdego wektora.

Przykład 9.2.4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathcal{C}([-π, π], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sprawdźmy, czy wektory $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ są ortogonalne/ortonormalne.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4} (-1 - (-1)) = 0 \\ \langle f, f \rangle &= \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

Wektory są ortogonalne, ale nie ortonormalne.

Twierdzenie 9.2.5 (Pitagorasa). Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u, v \in V \quad u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Dowód. $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \stackrel{\langle u, v \rangle = 0}{=} \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \square$

Twierdzenie 9.2.6. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Wniosek 9.2.7. i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

ii) W n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 9.2.8. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną (ortonormalną)* tej przestrzeni.

Przykład 9.2.9. W przestrzeni \mathbb{R}^n ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

MOTYWACJA: Przestrzeń \mathbb{E}^3

baza ortogonalna $\mathcal{B}_k^3 = (\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1))$

Dla dowolnego wektora $v = (v_x, v_y, v_z)$ mamy $v_x = v \circ \hat{i}, v_y = v \circ \hat{j}, v_z = v \circ \hat{k}$.

Z dokładnością do znaku skalary v_x, v_y, v_z to długości rzutów ortogonalnych wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio, zaś wektory $v_x \cdot \hat{i}, v_y \cdot \hat{j}, v_z \cdot \hat{k}$, to rzuty ortogonalne wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio.

Twierdzenie 9.2.10. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Niech $v \in V, v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}.$$

Ponadto

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \frac{\langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} + \frac{\langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} + \dots + \frac{\langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle}{\|b_n\|^2}.$$

Wniosek 9.2.11. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \dots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$

Dowód. Wystarczy w twierdzeniu 9.2.10 przyjąć $\|b_i\| = 1$. \square

Wniosek 9.2.12. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oraz niech $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas baza \mathcal{B} jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$.

Dowód. Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^n \beta_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i, b_j \rangle$ równa się $\sum_i \alpha_i \beta_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$. \square

9.3 Metody ortogonalizacji

Twierdzenie 9.3.1. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\{b_1, \dots, b_m\} \subset V$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny $\{c_1, \dots, c_m\} \subset V$ taki, że $\text{lin}\{b_1, \dots, b_m\} = \text{lin}\{c_1, \dots, c_m\}$.

Wniosek 9.3.2. i) Każda skończona wymiarowa przestrzeń euklidesowa różna od $\{0\}$ ma bazę ortogonalną i ortonormalną.

ii) W przestrzeni euklidesowej skończonej wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Przykład 9.3.3. Rozważmy przestrzeń \mathbb{E}^3 , tj. \mathbb{R}^3 ze standardowym iloczynem skalar- nym. Dana jest baza $\mathcal{B} = (b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4))$ przestrzeni \mathbb{R}^3 . Dokonamy ortogonalizacji bazy \mathcal{B} .

Zauważmy, że baza \mathcal{B} nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = (1, -2, 0)$. Wówczas oczywiście $\text{lin}\{c_1\} = \text{lin}\{b_1\}$.

II KROK: Aby zagwarantować, że $\text{lin}\{c_1, c_2\} = \text{lin}\{b_1, b_2\}$, poszukujemy c_2 w postaci $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzemy α w taki sposób, by $c_2 \circ c_1 = 0$.

Obliczamy $c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1)$.

Aby $c_2 \circ c_1 = 0$, wystarczy przyjąć $\alpha = -\frac{b_2 \circ c_1}{c_1 \circ c_1}$.

W naszym przykładzie $0 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_2 \circ c_1) = (5, 5, 1) \circ (1, -2, 0) + \alpha \cdot (1, -2, 0) \circ (1, -2, 0)$

$(1, -2, 0) = -5 + 5\alpha$, skąd $\alpha = 1$. Zatem $c_2 = b_2 + c_1 = (6, 3, 1)$.

III KROK: Aby zagwarantować, że $\text{lin}\{c_1, c_2, c_3\} = \text{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$, poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, dla pewnych $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzemy β_1, β_2 w taki sposób, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.

Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 \|c_1\|^2$, skąd $\beta_1 = -\frac{b_3 \circ c_1}{\|c_1\|^2}$. Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 \|c_2\|^2$, skąd $\beta_2 = -\frac{b_3 \circ c_2}{\|c_2\|^2}$.

W naszym przykładzie $\begin{cases} 0 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 \|c_1\|^2 = (5, 4, 4) \circ (1, -2, 0) + \beta_1 (1 + 4 + 0) = -3 + 5\beta_1 \\ 0 = b_3 \circ c_2 + \beta_2 \|c_2\|^2 = (5, 4, 4) \circ (6, 3, 1) + \beta_2 (36 + 9 + 1) = 46 + 46\beta_2 \end{cases}$.

Skąd $\beta_1 = \frac{3}{5}$, $\beta_2 = -1$.

Zatem $c_3 = b_3 + \frac{3}{5}c_1 - c_2 = (5, 4, 4) + \frac{3}{5}(1, -2, 0) - (6, 3, 1) = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)$.

$\mathcal{C} = (c_1 = (1, -2, 0), c_2 = (6, 3, 1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3))$ jest bazą ortogonalną.

Ponieważ $\|c_1\| = \sqrt{5}$, $\|c_2\| = \sqrt{46}$, $\|c_3\| = \sqrt{\frac{46}{5}}$, zatem bazą ortonormalną jest

$\mathcal{C}' = (c'_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1, -2, 0), c'_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{1}{\sqrt{46}} \cdot (6, 3, 1), c'_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \sqrt{\frac{5}{46}} \cdot (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3))$.

Wniosek 9.3.4. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, to wówczas ciąg wektorów $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \quad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 \quad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 \quad \dots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{\|c_i\|^2} c_i$$

Przykład 9.3.5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

Niech $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$. Zauważmy, że baza \mathcal{B} nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_3 = 1 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 2 \neq 0$.

Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = 1$.

II KROK: Poszukujemy $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $c_2 \circ c_1 = 0$.

Obliczamy $0 = c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha (c_1 \circ c_1) = (-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \alpha (1 + 1 + 1) = 3\alpha$.

Skąd $\alpha = 0$. Zatem $c_2 = b_2 = x$. (Mogliśmy to zauważyć wcześniej.)

III KROK: Poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzmy β_1, β_2 tak, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.

Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 \|c_1\|^2 = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \beta_1 \cdot 3$, skąd $\beta_1 = -\frac{2}{3}$.

Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 \|c_2\|^2 = (1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) + \beta_2 \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 1^2) = 2\beta_2$, skąd $\beta_2 = 0$.

Zatem $c_3 = b_3 - \frac{2}{3}c_1 = x^2 - \frac{2}{3}$.

$\mathcal{C} = (c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x^2 - \frac{2}{3})$ jest bazą ortogonalną.

$$\|c_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \|c_2\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Bazą ortonormalną jest układ wektorów

$$\mathcal{C}' = \left(c'_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c'_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}x, c'_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right).$$

Macierzowa metoda ortogonalizacji

Twierdzenie 9.3.6. Niech u_1, \dots, u_m będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni \mathbb{E}^n . Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów u_1, \dots, u_m w bazie kanonicznej przestrzeni \mathbb{R}^n . Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej $[AA^T|A]$, można doprowadzić ją do postaci $[G|A']$, gdzie $G \in M_m(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy $A' \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne w \mathbb{E}^n .

Przykład 9.3.7. Stosując metodę macierzową, zortogonalizujemy układ wektorów $b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4)$ w przestrzeni \mathbb{E}^3 .

Układ ten jest liniowo niezależny, bowiem
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 46 \neq 0.$$

Układ ten nie jest ortogonalny, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 5 & 5 \\ & & & -2 & 5 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 5 & -5 & -3 \\ 5 & 5 & 1 & -5 & 51 & 49 \\ 5 & 4 & 4 & -3 & 49 & 57 \end{array} \quad A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 51 & 49 \\ -3 & 49 & 57 \end{bmatrix}$$

$$[A \cdot A^T | A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 51 & 49 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & 49 & 57 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{w_2+w_1 \\ w_3+\frac{3}{5}w_1}]{\substack{w_2-w_1 \\ w_3-\frac{3}{5}w_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 46 & \frac{276}{5} & \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 4 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{46}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 3 \end{array} \right]$$

Układ ortogonalny $c_1 = (1, -2, 0), c_2 = (6, 3, 1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 3)$.

Jeśli nie używaliśmy operacji $\alpha \cdot w_i$, to na przekątnej macierzy G otrzymujemy $\|c_1\|^2, \|c_2\|^2, \|c_3\|^2$.

Zatem $\|c_1\| = \sqrt{5}, \|c_2\| = \sqrt{46}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{46}{5}}$.

9.4 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, zaś $S \subset V$ dowolnym podzbiorem.

Definicja 9.4.1. Zbiór $S^\perp := \{v \in V : \forall x \in S \langle v, x \rangle = 0\}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym zbioru S* w przestrzeni euklidesowej V . Jeżeli zbiór S jest jednoelementowy tj. $S = \{x\}$, to zbiór S^\perp nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym wektora $x \in V$* .

Twierdzenie 9.4.2. Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

- i) Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , to wówczas U^\perp również jest podprzestrzenią liniową.
- ii) Dla dowolnego wektora $u \in V$ zbiór $\{u\}^\perp$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

Przykład 9.4.3. W przestrzeni \mathbb{E}^4 wyznaczmy wszystkie wektory v ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$.

Niech $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Wówczas $u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$. Zatem $v = (x, y, -x, t)$ oraz $\{u\}^\perp = \{(x, y, -x, t) : x, y, t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Definicja 9.4.4. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Jeśli $w \in U^\perp$, to mówimy, że wektor w jest *ortogonalny do podprzestrzeni U* i piszemy $w \perp U$.

Uwaga 9.4.5. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V , zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora $w \in V$

$$w \perp U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad w \perp b_i$$

Dowód. Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. Ponadto jeśli dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mamy $\langle w, b_i \rangle = 0$, to wówczas dla dowolnego $u \in U, u = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$ mamy $\langle w, u \rangle = \alpha_1 \langle w, b_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle w, b_n \rangle = 0$. Zatem $w \perp U$. \square

Przykład 9.4.6. Rozważmy $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, podprzestrzeń $U = \mathbb{R}_1[x]$ oraz $w = 6x^2 - 6x + 1$. Czy $w \perp U$?

$$\begin{aligned} w \perp U = \mathbb{R}_1[x] &= \text{lin}\{1, x\} \Leftrightarrow w \perp 1 \wedge w \perp x \\ \langle w, 1 \rangle &= \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = 2x^3 - 3x^2 + x \Big|_0^1 = 0 \\ \langle w, x \rangle &= \int_0^1 (6x^3 - 6x^2 + x)dx = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = 0 \quad \text{Zatem } w \perp U. \end{aligned}$$

Własności dopełnienia ortogonalnego

Twierdzenie 9.4.7. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U, U_1, U_2 jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

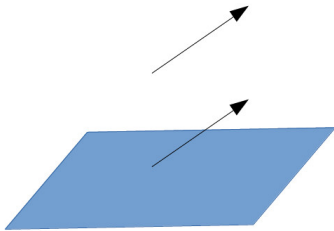
- i) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$,
- ii) $U^\perp = (\text{lin}U)^\perp$,
- iii) $U \subset (U^\perp)^\perp$.

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową.

Definicja 9.4.8. Operator liniowy $\pi \in \text{End}(V)$ dany wzorem

$$\forall v \in V \quad \pi(v) = u, \quad \text{gdzie} \quad v - u \perp U,$$

nazywamy *rzutowaniem ortogonalnym* lub *projekcją ortogonalną* na podprzestrzeń U . Obraz wektora v poprzez π nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U .



Twierdzenie 9.4.9 (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego). Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny $u \in U$ tego wektora na podprzestrzeń U .

- i) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest dowolną bazą podprzestrzeni U , wówczas $u = \pi(v) = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$, gdzie

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \langle v, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k \rangle \end{bmatrix}. \quad (1)$$

- ii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest bazą ortogonalną podprzestrzeni U , wówczas

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} b_2 + \dots + \frac{\langle v, b_k \rangle}{\|b_k\|^2} b_k.$$

iii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni U , wówczas

$$u = \pi(v) = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + \dots + \langle v, b_k \rangle b_k.$$

Macierz $\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix}$ występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy *macierzą Grama* układu wektorów (b_1, b_2, \dots, b_k) .

Wniosek 9.4.10. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ będzie bazą ortonormalną podprzestrzeni U , zaś $A \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ macierzą, której kolumnami są kolejne wektory bazy \mathcal{B} . Wówczas AA^T jest reprezentacją macierzową projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń U .

Przykład 9.4.11. W przestrzeni euklidesowej \mathbb{E}^4 wyznaczmy rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, 1, 0)$ na podprzestrzeń $U = \text{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest bazą U , bowiem $r \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

METODA I

$$u := \pi_U(v) = ?, \quad w := v - u \perp U \Leftrightarrow w \perp b_1 := (2, 1, 1, 2) \wedge w \perp b_2 := (1, 1, -3, 0)$$

$u \in U$, zatem istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $u = \alpha b_1 + \beta b_2$. Wówczas

$$w = (1, 1, 1, 0) - \alpha(2, 1, 1, 2) - \beta(1, 1, -3, 0) = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha)$$

Otrzymujemy układ dwóch równań

$$0 = \langle w, b_1 \rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (2, 1, 1, 2) = 4 - 10\alpha,$$

$$0 = \langle w, b_2 \rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 - 11\beta.$$

Stąd $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = -\frac{1}{11}$ oraz

$$u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{2}{5}, -\frac{1}{11}\right]_{\mathcal{B}} = \frac{2}{5}b_1 - \frac{1}{11}b_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, 0\right) = \left(\frac{39}{55}, \frac{17}{55}, \frac{37}{55}, \frac{4}{5}\right)$$

METODA II

Zauważmy, że baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest ortogonalna.

Istotnie $b_1 \circ b_2 = (2, 1, 1, 2) \circ (1, 1, -3, 0) = 0$. Na mocy twierdzenia 9.2.10 mamy

$$u = \left[\frac{\langle u, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}, \frac{\langle u, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} \right]. \text{ Ale } \langle v, b_i \rangle = \langle u, b_i \rangle, \text{ zatem } u = \left[\frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}, \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} \right]. \text{ Obliczamy}$$

$$\langle v, b_1 \rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (2, 1, 1, 2) = 4, \quad \langle v, b_2 \rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 \text{ oraz } \|b_1\|^2 = 10, \|b_2\|^2 = 11. \text{ Stąd } u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}.$$

UWAGA: Gdyby baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ nie była ortogonalna, zawsze możemy metodą Grama-Schmidta ją zortogonalizować i w dalszych rachunkach wykorzystać znaną bazę ortogonalną $\mathcal{C} := (c_1, c_2)$.

METODA III

Znajdziemy macierz rzutowania na U . Normalizujemy bazę \mathcal{B} . Niech $\mathcal{B}' = \{b'_1, b'_2\}$, gdzie

$$b'_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 1, 2), b'_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, -3, 0). \text{ Niech } A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \end{bmatrix}. \text{ Macie-}$$

$$\text{rzę projekcji jest } AA^T = \begin{bmatrix} \frac{27}{55} & \frac{16}{55} & \frac{-4}{55} & \frac{2}{5} \\ \frac{16}{55} & \frac{21}{110} & \frac{-19}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{-4}{55} & \frac{-19}{110} & \frac{101}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}. \text{ Stąd } AA^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{55} \\ \frac{17}{55} \\ \frac{37}{55} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Interperatacja geometryczna metody Grama-Schmidta

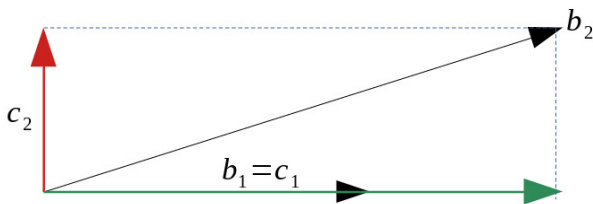
Rozważmy przestrzeń \mathbb{E}^3 i jej bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ będzie szukaną bazą ortogonalną.

KROK I:

$$c_1 := b_1$$

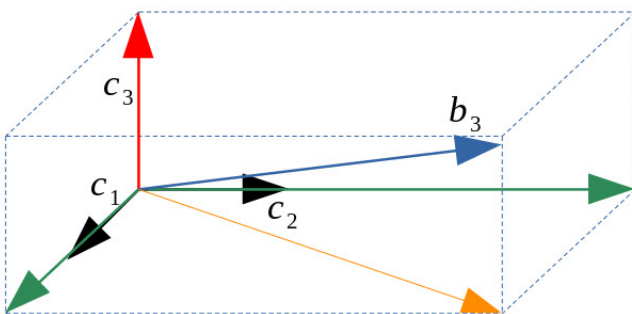
KROK II:

$$c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 = b_2 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_2)$$



KROK III:

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_3) - \pi_{\text{lin}\{c_2\}}(b_3) = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1, c_2\}}(b_3)$$



9.5 Macierze ortogonalne i izometrie liniowe

Przykład 9.5.1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wektor $(1, 0, 0)$ ma długość 1, zaś wektor $(1, 6, 0)$ ma długość $\sqrt{37}$.

Przekształcając dowolne wektory w \mathbb{R}^n za pomocą macierzy przejścia możemy zmienić ich długość oraz kąt między nimi. Wyróżnimy teraz te macierze, które pozostawiają powyższe wielkości niezmienione.

Definicja 9.5.2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy *macierzą ortogonalną*, jeśli $A^T A = A A^T = I_n$.

Przykład 9.5.3. Macierz $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ jest ortogonalna.

Twierdzenie 9.5.4. Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Nazywamy ją *grupą ortogonalną* i oznaczamy symbolem $O(n)$.

Wniosek 9.5.5. i) Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy 1 lub -1 .

- ii) Wiersze macierzy ortogonalnej są wzajemnie ortogonalnymi wersorami (względem standardowego iloczynu skalarnego w \mathbb{R}^n). Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla kolumn.
- iii) Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ to dwie bazy ortonormalne tej przestrzeni. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ jest macierzą ortogonalną. I odwrotnie, dowolna macierz ortogonalna jest macierzą przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi.

Dowód. i) Wynika to z równości $1 = \det I_n = \det(AA^T) = (\det A)^2$. \square

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, skończenie wymiarową. Rozpatrujemy normę zadaną przez iloczyn skalarny.

Definicja 9.5.6. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy

- i) *ortogonalnym*, jeśli jego macierz w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną,
- ii) *izometrią liniową*, jeśli zachowuje on odległość, tzn. spełniony jest warunek

$$\forall u, v \in V \quad \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v\|.$$

Stwierdzenie, że macierz φ w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną, jest równoważne stwierdzeniu, że macierz φ w dowolnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną. Wynika to z faktu, że macierz przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi jest macierzą ortogonalną oraz z faktu, że macierze ortogonalne tworzą grupę. Oznacza to, że odwzorowanie ortogonalne to takie odwzorowanie liniowe, które przeprowadza pewną (każdą) bazę ortonormalną przestrzeni V na bazę ortonormalną.

Uwaga 9.5.7. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ będzie izometrią liniową. Wówczas

- i) φ jest monomorfizmem, a zatem jest izomorfizmem.
- ii) $\text{Spec}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$

Twierdzenie 9.5.8. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne.

- i) φ jest izometrią liniową.
- ii) φ zachowuje normę tzn. $\forall v \in V \|\varphi(v)\| = \|v\|$.
- iii) φ zachowuje iloczyn skalarny tzn. $\forall u, v \in V \langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$.
- iv) φ jest operatorem ortogonalnym

Wniosek 9.5.9. Izometrie liniowe zachowują kąty, tzn. jeżeli kąt pomiędzy wektorami u i v wynosi α , to kąt pomiędzy wektorami $\varphi(u)$ i $\varphi(v)$ również wynosi α .

Przykład 9.5.10. Rozważmy \mathbb{R}^2 ze standardowym iloczynem skalarnym. Czy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-x + y, y)$ jest izometrią liniową?

Baza standardowa jest bazą ortonormalną, gdy rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Wyznamy macierz A endomorfizmu φ w tejże bazie.

Otrzymujemy $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sprawdźmy, czy A jest ortogonalna.

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq I$$

Zatem φ nie jest izometrią liniową.

Uwaga 9.5.11. Jeśli rozpatrujemy niestandardowy iloczyn skalarny, baza kanoniczna nie musi być ortonormalna. Nie zawsze zatem wystarczy badać macierz w bazie kanonicznej.

Izometrie liniowe przestrzeni \mathbb{R}^n ze standardowym iloczynem skalarnym

Jeśli $v = (v_x, v_y, v_z)$ jest wektorem w \mathbb{R}^3 , to symbolem v^T oznaczamy odpowiadający mu wektor kolumnowy $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$.

n = 1

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest liniowe, zatem $\varphi(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$

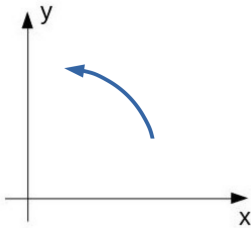
φ jest izometrią, zatem $|x| = |ax| = |a| \cdot |x|$ oraz $a = \pm 1$.

Otrzymujemy dwie izometrie liniowe $\varphi_1 = \text{id}_{\mathbb{R}}$, czyli $\varphi_1(x) = x$ oraz φ_2 takie, że $\varphi_2(x) = -x$.

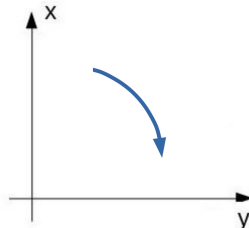
n = 2

Orientacja płaszczyzny

Jeśli obrót osi Ox dookoła punktu O o kąt $\frac{\pi}{2}$ doprowadzający do pokrycia się jej z osią Oy odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to mówimy, że układ jest *prawoskrętny* (*zorientowany dodatnio*), a jeśli zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to *lewoskrętny*. O płaszczyźnie, na której ustalono kierunek dodatni obrotu, mówimy, że została *zorientowana*.



układ prawoskrętny



układ lewoskrętny

Poniżej rozważamy płaszczyznę zorientowaną dodatnio.

Podójście algebraiczne

Z założenia $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest liniowe, zatem możemy rozważyć jego macierz w bazie standardowej $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Wiemy, że macierz A jest ortogonalna oraz $\det A = \pm 1$.

$$\text{Z równości } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^T A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{otrzymujemy układ równań } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}.$$

Punkty $(a, b), (c, d)$ leżą na okręgu jednostkowym, zatem istnieje taki kąt α , że $a = \cos \alpha$ oraz $b = \sin \alpha$. Wówczas na mocy warunku ortogonalności $ab + cd = 0$ mamy,

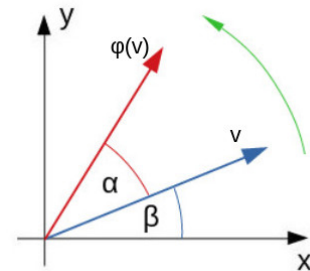
że $c = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$, $d = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ lub też $c = \cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = \sin \alpha$,
 $d = \sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = -\cos \alpha$. Podsumowując,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

1) W pierwszym przypadku $\det A = a^2 + b^2 = 1$. Niech $v = (x, y) = (r \cos \beta, r \sin \beta)$.
 Obliczamy $\varphi(v)$.

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

Mamy do czynienia z *rotacją (obrotem) o kąt α wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jeśli kąt α jest dodatni). Odwzorowanie oznaczamy symbolem R_α lub $R(\alpha)$.*



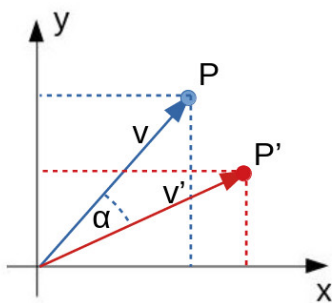
Macierzą obrotu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (obrotu o kąt $-\alpha$) będzie

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

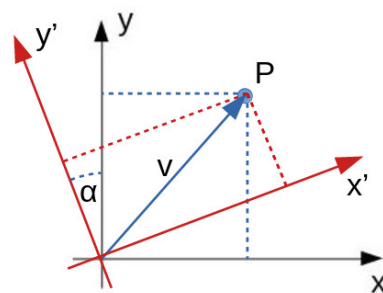
Zauważmy jeszcze, że $\det(A - tI) = (a - t)^2 + b^2$ i $\text{Spec}(A) = \emptyset$.

Macierz A nie jest diagonalizowalna. Ponadto *rotacja nie zmienia orientacji* układu współrzędnych.

Uwaga 9.5.12. W naszych rozważaniach przyjęliśmy prawoskrętny układ współrzędnych i obracaliśmy wektor (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Gdybyśmy zmienili układ na lewoskrętny, ruch odbywałby się w przeciwnym kierunku. Alternatywne podejście używa obrotu osi układu współrzędnych. Wówczas wyliczona macierz obrotu reprezentuje obrót osi o ten sam kąt ale w przeciwnym kierunku (zgodnie ze wskazówkami zegara).



Punkt (wektor) zmienia swoje położenie. Zmieniają się jego współrzędne w układzie współrzędnych.

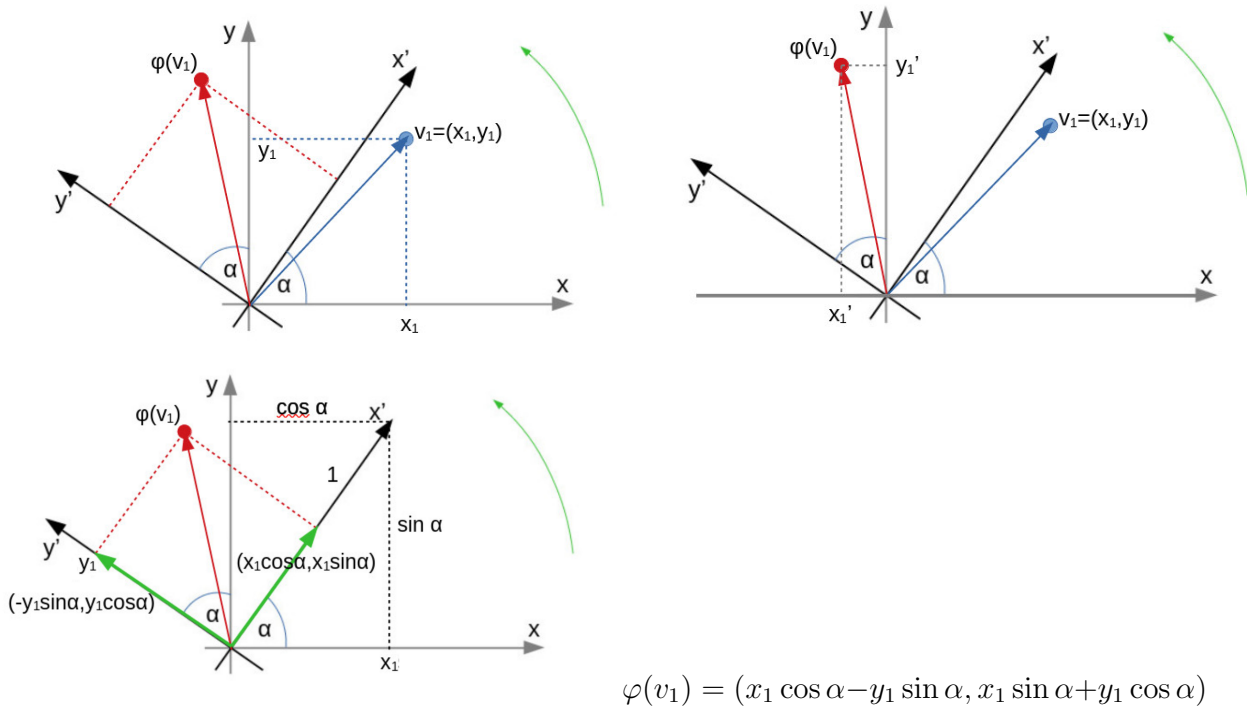


Punkt (wektor) są nieruchome. Obracamy układ współrzędnych, tzn. dokonujemy zmiany bazy. W nowej bazie punkt ma nowe współrzędne.

Współrzędne punktu P' w "starej bazie" (rysunek po lewej) są takie same, jak współrzędne punktu P w "nowej bazie" (rysunek po prawej).

Podójście geometryczne

Obrotom układu współrzędnych o kąt α nazywamy obrót bez zmiany początku układu oraz bez zmiany jednostek miary wzdłuż wszystkich osi.



Przykład 9.5.13.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{identyczność, tj. rotacja o kąt miary } 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \pi$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \frac{3}{2}\pi$$

Przykład 9.5.14. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Obliczając wyznacznik $\det A = 1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje rotację. Znajdziemy kąt obrotu.

Ponieważ $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, zatem α ma miarę $\frac{2}{3}\pi$ lub $\frac{4}{3}\pi$. Ponadto $\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zaś $\sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem jest to obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt $\frac{2}{3}\pi$ lub (równoważnie) obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt $\frac{4}{3}\pi$.

Przykład 9.5.15. Wyznamy równanie prostej l' powstałej przez obrót prostej l o równaniu $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ o kąt $\frac{\pi}{4}$.

Obliczamy $x' = x \cos \frac{\pi}{4} - y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$, $y' = x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$. Dodając i odejmując równania stronami, obliczamy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')$. Wstawiając do równania $y = mx$, otrzymujemy $-x' + y' = m(x' + y')$. Zatem $(1 - m)y' = (1 + m)x'$. Równaniem prostej obróconej jest $(m + 1)x + (m - 1)y = 0$.

2) W drugim przypadku $\det A = -1$. Obliczamy

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} a - t & b \\ b & -a - t \end{vmatrix} = -(a - t)(a + t) - b^2 = t^2 - a^2 - b^2 = t^2 - 1.$$

Zatem $\text{Spec}(A) = \{-1, 1\}$ i macierz A jest diagonalizowalna. W bazie wektorów własnych macierz operatora φ jest postaci $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Niech $v = (x, y)$. Obliczamy współrzędne $\varphi(v)$ w bazie wektorów własnych.

$$D \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Mamy do czynienia z *symetrią ortogonalną (odbiciem) względem prostej $y = 0$* . $A = P^{-1}DP$, gdzie P to macierz przejścia do bazy wektorów własnych. Zmiana bazy oznacza zmianę układu współrzędnych z zachowaniem początku układu współrzędnych (bo przekształcenie jest liniowe). Zatem $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ jest symetrią ortogonalną względem pewnej prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$. Jaka to prosta?

Podejście algebraiczne

Przypuścimy, że l jest prostą o równaniu $y = \text{tg} \beta \cdot x$. Aby znaleźć odbicie wektora v względem l posłużymy się inną bazą ortonormalną. Pierwszy wektor bazowy b_1 będzie wersorem leżącym na prostej l , a drugi b_2 będzie wersorem do niego prostopadłym. Zatem $b_1 = (\cos \beta, \sin \beta)$, $b_2 = (-\sin \beta, \cos \beta)$. Istnieją skalary $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $v = c_1 b_1 + c_2 b_2$. Obliczamy

$$v^T = c_1 \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos \beta - c_2 \sin \beta \\ c_1 \sin \beta + c_2 \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Podobnie obliczamy $\varphi(v) = c_1 b_1 - c_2 b_2$.

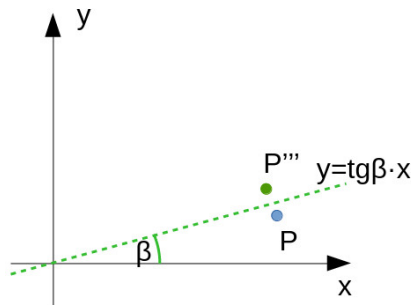
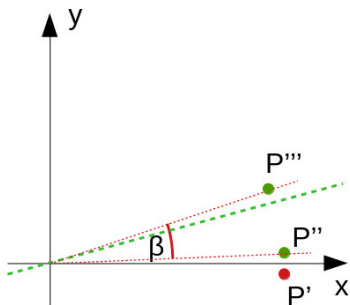
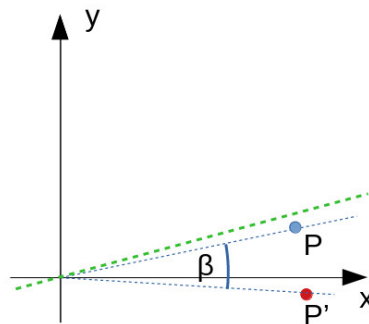
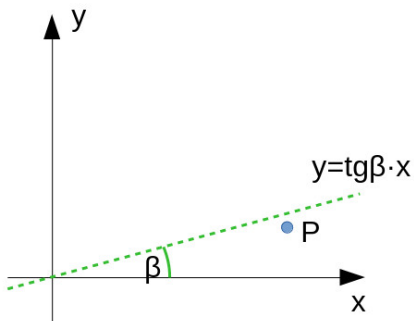
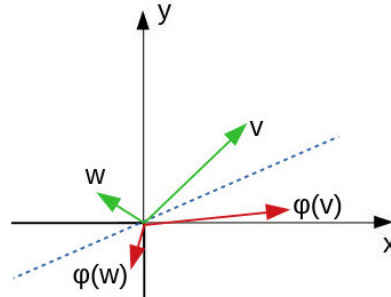
$$\varphi(v)^T = c_1 \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} - c_2 \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos \beta + c_2 \sin \beta \\ c_1 \sin \beta - c_2 \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \varphi(v)^T &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} v^T = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} v^T = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} v^T \end{aligned}$$

Czyli $\alpha = 2\beta$ i macierz $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$ reprezentuje odbicie względem prostej o równaniu $y = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot x$.

Podejście geometryczne



1) Obracamy punkt o kąt $-\beta$.

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

2) Dokonujemy odbicia względem prostej $y = 0$.

3) Obracamy punkt o kąt β .

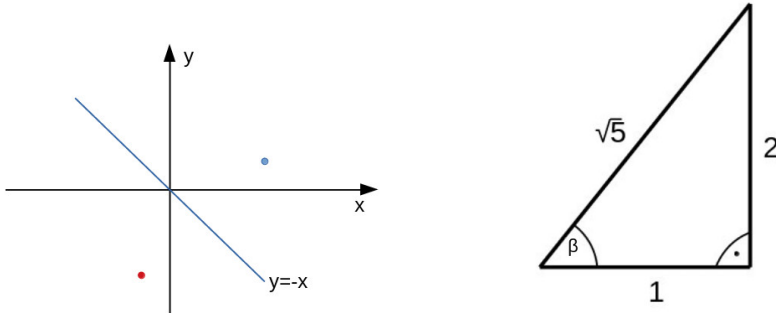
4) Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}.$$

Wniosek 9.5.16. Izometria liniowa płaszczyzny jest rotacją (obrotem) wokół punktu $(0,0)$ o pewien kąt lub symetrią ortogonalną (odbiciem) względem pewnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

Przykład 9.5.17. Macierzą symetrii ortogonalnej względem prostej $y = -x$ jest macierz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Otrzymujemy $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$.



Przykład 9.5.18. Wyznamy macierz izometrii liniowej płaszczyzny będącej symetrią ortogonalną względem prostej $y = 2x$.

METODA I: Jeśli $\operatorname{tg} \beta = 2$, to wówczas $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Obliczamy $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = \frac{4}{5}$ oraz $\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = -\frac{3}{5}$. Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

METODA II: Niech F oznacza poszukiwaną macierz, zaś F_0 macierz odbicia względem prostej $y = 0$. Wówczas $F = R(\beta)F_0R(-\beta)$. Ponieważ $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, zatem

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Uwaga 9.5.19. Składaniu odwzorowań odpowiada mnożenie reprezentujących ich macierzy w pewnej ustalonej bazie. Geometrycznie oznacza to, że układ współrzędnych jest nieruchomy, a obrotowi/odbiciu podlegają wektory.

Przykład 9.5.20. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Obliczając wyznacznik $\det A = -1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje odbicie. Znajdziemy oś symetrii.

Punkty na osi symetrii nie zmieniają swego położenia w wyniku obicia. Są to punkty (x, y) spełniające równanie $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Otrzymujemy układ równań $\begin{cases} 3x + 4y = -5x \\ -4x + 3y = 5y \end{cases}$.

Zatem prosta $y = -2x$ jest osią symetrii.

Uwaga 9.5.21. Symetria ortogonalna φ jest *inwolucją*, tzn. spełnia warunek $\varphi \circ \varphi = \text{id}$. Równoważnie, jeśli A jest macierzą odbicia φ , to wówczas $A^2 = I$ lub inaczej $A^{-1} = A$.

9.6 Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznych

Twierdzenie 9.6.1. i) Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym rzeczywistej macierzy symetrycznej są wzajemnie ortogonalne.

ii) Każdej wartości własnej o krotności algebraicznej k rzeczywistej macierzy symetrycznej odpowiada k liniowo niezależnych wektorów własnych.

Wniosek 9.6.2 (Twierdzenie spektralne dla rzeczywistej macierzy symetrycznej). Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ istnieje macierz diagonalna $D \in M_n(\mathbb{R})$ oraz macierz ortogonalna $P \in O(n)$ takie, że

$$P^{-1}AP = P^TAP = D.$$

Mówimy wówczas, że macierz A jest *ortogonalnie diagonalizowalna*.

Diagonalizacja macierzy za pomocą macierzy ortogonalnych:

- 1) Znajdujemy wartości własne i odpowiadające im wektory własne.
- 2) Normalizujemy wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym o krotności algebraicznej równej 1.
- 3) Wektory własne odpowiadające wartości własnej o krotności algebraicznej większej niż 1 dobieramy w taki sposób, by były ortogonalne i następnie normalizujemy.

Przykład 9.6.3. Macierz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ jest symetryczna, a zatem ortogonalnie diagonalizowalna. Obliczamy $\chi_A(t) = \det(A - tI) = -t(t - 6)^2$.
 $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6\}$, przy czym $k_1 = 1, k_2 = 2$.

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\begin{cases} x = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. Zatem $E_0 = \{(x, -2x, x), x \in \mathbb{R}\}$.

Wybieramy wektor własny $u = (1, -2, 1)$ i normalizujemy go $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - 2y + z = 0.$$

Zatem $E_6 = \{(2y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$.

Wybieramy wektory własne $v = (2, 1, 0), w = (-1, 0, 1)$. W \mathbb{R}^3 rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny. Oczywiście $\langle u, v \rangle = 0$ oraz $\langle u, w \rangle = 0$.

Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = -2 \neq 0$, zatem v i w nie są do siebie ortogonalne. Zortogonalizujemy układ $\{v, w\}$ metodą Grama-Schmidta.

Niech $c_1 := v$. Poszukujemy $c_2 = w + \alpha c_1, \alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $\langle c_2, c_1 \rangle = 0$.

Obliczamy $\langle c_2, c_1 \rangle = \langle w + \alpha c_1, c_1 \rangle = \langle w, c_1 \rangle + \alpha \langle c_1, c_1 \rangle = (-2 + 0 + 0) + \alpha(4 + 1 + 0)$.

Skąd $5\alpha - 2 = 0$, czyli $\alpha = \frac{2}{5}$ oraz $c_2 = w + \frac{2}{5}v = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

Mamy $\langle c_1, c_2 \rangle = 0$. Normujemy wektory $\hat{c}_1 = \frac{c_1}{|c_1|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), \hat{c}_2 = \frac{c_2}{|c_2|} = \sqrt{\frac{5}{6}}(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

Rozważamy bazę $(\hat{u}, \hat{c}_1, \hat{c}_2)$. Macierz diagonalizująca ma postać $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{5\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

Można sprawdzić, że $PP^T = I$, zatem $P \in O(3)$ oraz $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Uwaga 9.6.4. Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznej może być widziana jako rotacja osi układu współrzędnych w taki sposób, aby były one równoległe do wektorów własnych. Zobacz tutaj.

