9.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.

Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy *unormowanym* lub *wersorem*. Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować, tj. znaleźć wersor $\hat{v}$ o tym samym zwrocie i kierunku co v.
Istotnie $\hat{v} := \frac{v}{||v||}$ jest wersorem, bowiem $||\hat{v}|| = \left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \left|\frac{1}{||v||}\right| \cdot ||v|| = \frac{1}{||v||} \cdot ||v|| = 1.$

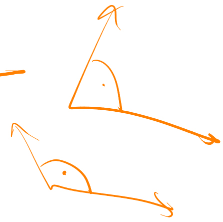
dł. wektora

Miara kąta między wektorami

wart. bezwzgl. moduł w $\mathbb{R}$

W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarza dla dowolnych $u, v \in V$ mamy
$|\langle u,v \rangle| \leq \sqrt{\langle u,u \rangle}\sqrt{\langle v,v \rangle} = ||u|| \cdot ||v|| \;\Rightarrow\; \frac{|\langle u,v \rangle|}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1.$
Jeśli $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$, możemy widzieć $\frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}$ jako cosinus jednoznacznie określonego kąta $\alpha \in [0, \pi]$. Definiujemy kąt między wektorami u i v jako α. Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem

liczba



$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}, \quad \measuredangle(u,v) = \arccos \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym $\mathbf{0}_V$ a innym wektorem jest nieokreślony.

Przykład 9.2.1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}_1[x], \langle .,. \rangle)$, gdzie $\langle p,q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wyznaczymy miarę kąta pomiędzy wektorami $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$.

$\langle u,v \rangle = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos\alpha$

$\mathbb{R}_1[x] = \{p = ax + b\}$

$$\begin{aligned}
\langle u,v \rangle &= u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18 \\
||u|| &= \sqrt{\langle u,u \rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\
||v|| &= \sqrt{\langle v,v \rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \\
\alpha = \measuredangle(u,v) &= \arccos \frac{18}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}}
\end{aligned}$$

zależy od tego

Definicja 9.2.2. i) Dwa wektory u, v nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$.

zmienisz iloczyn → zmienisz kąt → zmienisz długość

ii) Układ wektorów $\{v_1, \dots v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$\forall i,j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j \;\Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

ortogonalny układ wersorów

ii) Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

długość = 1

$$\forall i,j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 \;; & i \neq j \\ 1 \;; & i = j \end{cases}.$$

$v_1 \circ v_2 = 0$

$v_1 \perp v_2$

$v_1 \circ v_1 = |v_1|^2 = 1^2 = 1$

Uwaga 9.2.3. Wektor zerowy $\mathbf{0}_V$ jest ortogonalny do każdego wektora.

$\langle v, \mathbf{0}_V \rangle = 0$

III sem. Analiza (szeregi Fouriera)

Przykład 9.2.4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R}),\langle .,.\rangle)$, gdzie $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sprawdzimy, czy wektory $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ są ortogonalne/ortonormalne.

$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x dx = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}\big(-1-(-1)\big) = 0$ $\quad f \perp g$

$\langle f,f\rangle = ||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$ $\quad \neq 1$ to nie werso-

Wektory są ortogonalne, ale nie ortonormalne.

$\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}g\}$ układ ortonormalny

Twierdzenie 9.2.5 (Pitagorasa)**.** Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u,v\in V \quad u\perp v \Leftrightarrow ||u+v||^2 = ||u||^2+||v||^2.$$

Dowód. $||u+v||^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \overset{\langle u,v\rangle=0}{=} ||u||^2+||v||^2$ □

WAŻNE

Twierdzenie 9.2.6. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Wniosek 9.2.7. i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny. (wersory $\neq \vec{0}$)

ii) W n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 9.2.8. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną (ortonormalną)* tej przestrzeni.

Np.

Przykład 9.2.9. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna $e_1=(1,0,\ldots,0), e_2=(0,1,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,0,\ldots,1)$.

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

$\mathbb{R}^3$ $\quad v=[2,4,5]$

MOTYWACJA: Przestrzeń $\mathbb{E}^3$

baza ortogonalna $\mathcal{B}_k^3 = \big(\hat{i}=(1,0,0), \hat{j}=(0,1,0), \hat{k}=(0,0,1)\big)$

Dla dowolnego wektora $v=(v_x,v_y,v_z)$ mamy $v_x = v\circ\hat{i}$, $v_y=v\circ\hat{j}$, $v_z=v\circ\hat{k}$.

Z dokładnością do znaku skalary v_x,v_y,v_z to długości rzutów ortogonalnych wektora v na osie Ox,Oy,Oz odpowiednio, zaś wektory $v_x\cdot\hat{i}, v_y\cdot\hat{j}, v_z\cdot\hat{k}$, to rzuty ortogonalne wektora v na osie Ox,Oy,Oz odpowiednio.

$2 = v\circ\hat{i}$
$4 = v\circ\hat{j}$
$5 = v\circ\hat{k}$

W bazie ortonormalnej łatwo znaleźć współrzędne!

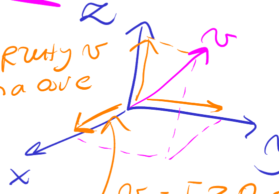
Twierdzenie 9.2.10. Niech $\mathcal{B}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V,\langle .,.\rangle)$. Niech $v\in V$, $v=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$v=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\ldots+\alpha_n b_n$

$v\circ b_1 = (\alpha_1 b_1+\ldots+\alpha_n b_n)\circ b_1 = \alpha_1(b_1\circ b_1)+\alpha_2(b_2\circ b_1)+\ldots+\alpha_n(b_n\circ b_1)$

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v,b_i\rangle}{||b_i||^2}.$$

stąd wzór



$v=[2,0,0] = (v\circ\hat{i})\cdot\hat{i}$

Ponadto $\quad \alpha_1 ||b_1||^2$

$$\forall u,w\in V \quad \langle u,w\rangle = \frac{\langle u,b_1\rangle\langle w,b_1\rangle}{||b_1||^2} + \frac{\langle u,b_2\rangle\langle w,b_2\rangle}{||b_2||^2} + \ldots \frac{\langle u,b_n\rangle\langle w,b_n\rangle}{||b_n||^2}.$$

$u = \sum\alpha_i b_i = \sum\frac{\langle v,b_i\rangle}{||b_i||^2}\cdot b_i$

$w = \sum\beta_i b_i = \sum\frac{\langle w,b_i\rangle}{||b_i||^2} b_i$

$\langle u,w\rangle = \langle\sum\ldots,\sum\ldots\rangle = \sum_{i,j}\frac{\langle v,b_i\rangle}{||b_i||^2}\frac{\langle w,b_j\rangle}{||b_j||^2}\langle b_i,b_j\rangle$ $\quad i\neq j \to$ daje 0 $\quad = \sum_i \frac{\langle\,\rangle\langle\,\rangle}{||b_i||^4}||b_i||^2$ tylko $i=j$

$\|b_i\|^2 = 1$

Wniosek 9.2.11. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest bazą ~~ortonormalną przestrzeni~~ euklidesowej $(V, \langle ., . \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$v = [1, 2, 3]$

$2 = v \circ j$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \boxed{\alpha_i = \langle v, b_i \rangle}$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \underbrace{\langle u, b_1 \rangle}_{\alpha_1} \underbrace{\langle w, b_1 \rangle}_{\beta_1} + \underbrace{\langle u, b_2 \rangle}_{\alpha_2} \underbrace{\langle w, b_2 \rangle}_{\beta_2} + \dots + \underbrace{\langle u, b_n \rangle}_{\alpha_n} \underbrace{\langle w, b_n \rangle}_{\beta_m}.$$

Dowód. Wystarczy w twierdzeniu 9.2.10 przyjąć $||b_i|| = 1$. □

Wniosek 9.2.12. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle ., . \rangle)$ oraz niech $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \dots + \alpha_n\beta_n$.

Dowód. Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{i=1}^n \beta_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i, b_j \rangle$ równa się $\sum_i^n \alpha_i \beta_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}$. □

9.3 Metody ortogonalizacji

baza podprzestrzeni $\mathcal{U}$

Twierdzenie 9.3.1. Niech $(V, \langle ., . \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\{b_1, \dots b_m\} \subset V$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny $\{c_1, \dots c_m\} \subset V$ taki, że $\text{lin}\{b_1, \dots b_m\} = \text{lin}\{c_1, \dots c_m\}$.

Wniosek 9.3.2. i) Każda skończenie wymiarowa przestrzeń euklidesowa różna od $\{\mathbf{0}\}$ ma bazę ortogonalną i ortonormalną.

ii) W przestrzeni euklidesowej skończenie wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Przykład 9.3.3. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$, tj. $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dana jest baza $\mathcal{B} = (b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B}$.

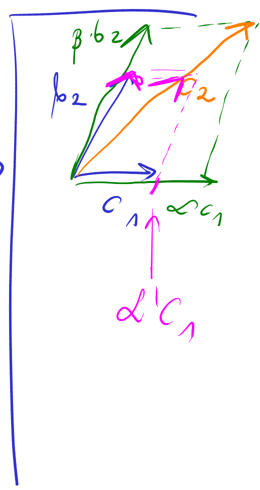
$1 \cdot 5 + (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 1$

Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $\boxed{b_1 \circ b_2} = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.

NIE ORTOGONALNA

Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = (1, -2, 0)$. Wówczas oczywiście $\text{lin}\{c_1\} = \text{lin}\{b_1\}$.



STĄD

II KROK: Aby zagwarantować, że $\boxed{\text{lin}\{c_1, c_2\} = \text{lin}\{b_1, b_2\}}$, poszukujemy c_2 w postaci $\boxed{c_2 = b_2 + \alpha c_1}$, dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzemy α w taki sposób, by $\boxed{c_2 \circ c_1 = 0}$.

$\beta = 1$

stąd $\alpha = ?$

Obliczamy $c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1)$.

Aby $c_2 \circ c_1 = 0$, wystarczy przyjąć $\alpha = -\frac{b_2 \circ c_1}{c_1 \circ c_1}$. $*$ $\|c_1\|^2$

W naszym przykładzie $0 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1) = \underbrace{(5, 5, 1)}_{b_2} \circ \underbrace{(1, -2, 0)}_{c_1} + \alpha \cdot \underbrace{(1, -2, 0)}_{c_1} \circ$

bez straty dla ogólności rozumowania

$c_2 \in \text{lin}\{c_1, b_2\}$

$c_2 \in \text{lin}\{\underset{c_1}{b_1}, b_2\} = \text{lin}\{c_1, b_2\} \Rightarrow c_2 = \underbrace{\alpha}_{?} c_1 + \underbrace{\beta}_{?} b_2$

c_1 0 $c_2 = b_2 + 1\cdot c_1$ $b_3 = ?$

$(1,-2,0) = \boxed{-5+5\alpha}$, skąd $\alpha = 1$. Zatem $c_2 = b_2 + c_1 = (6,3,1)$.

$1\cdot b_3$ B_3 DO

$c_3 = ?$ III KROK: Aby zagwarantować, że $\boxed{\text{lin}\{c_1,c_2,c_3\} = \text{lin}\{b_1,b_2,b_3\}}$, poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, dla pewnych $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzemy β_1, β_2 w taki sposób, by $\boxed{c_3 \circ c_1 = 0}$ oraz $\boxed{c_3 \circ c_2 = 0.}$

znaleźć $\beta_1 = ?$ $\beta_2 = ?$

Mamy $0 = c_3\circ c_1 = (b_3+\beta_1c_1+\beta_2c_2)\circ c_1 = b_3\circ c_1+\beta_1(\underbrace{c_1\circ c_1}_{||c_1||^2})+\beta_2(\underbrace{c_2\circ c_1}_{0}) = b_3\circ c_1+\beta_1||c_1||^2$, skąd $\beta_1 = -\frac{b_3\circ c_1}{||c_1||^2}$. Analogicznie $0 = c_3\circ c_2 = (b_3+\beta_1c_1+\beta_2c_2)\circ c_2 = b_3\circ c_2+\beta_1(\underbrace{c_1\circ c_2}_{0})+\beta_2(\underbrace{c_2\circ c_2}_{||c_2||^2}) = b_3\circ c_2+\beta_2||c_2||^2$, skąd $\beta_2 = -\frac{b_3\circ c_2}{||c_2||^2}$.

W naszym przykładzie $\begin{cases} 0 = b_3\circ c_1+\beta_1||c_1||^2 = (5,4,4)\circ(1,-2,0)+\beta_1(1+4+0) = -3+5\beta_1 = 0 \\ 0 = b_3\circ c_2+\beta_2||c_2||^2 = (5,4,4)\circ(6,3,1)+\beta_2(36+9+1) = 46+46\beta_2 = 0 \end{cases}$.

Skąd $\beta_1 = \frac{3}{5}$, $\beta_2 = -1$.
Zatem $c_3 = b_3 + \frac{3}{5}c_1 - c_2 = (5,4,4)+\frac{3}{5}(1,-2,0)-(6,3,1) = (-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},3)$. c_3
$\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,-2,0), c_2 = (6,3,1), c_3 = (-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},3)\big)$ jest bazą ortogonalną.

Ponieważ $||c_1|| = \sqrt{5}$, $||c_2|| = \sqrt{46}$, $||c_3|| = \sqrt{\frac{46}{5}}$, zatem bazą ortonormalną jest

$$\mathcal{C}' = \Big(c_1' = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(1,-2,0), c_2' = \frac{c_2}{||c_2||} = \frac{1}{\sqrt{46}}\cdot(6,3,1), c_3' = \frac{c_3}{||c_3||} = \sqrt{\frac{5}{46}}\cdot(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},3)\Big).$$

wersory

Wniosek 9.3.4. Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1,b_2,\ldots,b_n\big)$ jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej $(V,\langle .,.\rangle)$, to wówczas ciąg wektorów $\mathcal{C} = \big(c_1,c_2,\ldots,c_n\big)$, zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \qquad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2,c_1\rangle}{||c_1||^2}c_1 \qquad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3,c_1\rangle}{||c_1||^2}c_1 - \frac{\langle b_3,c_2\rangle}{||c_2||^2}c_2 \quad \ldots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\langle b_n,c_i\rangle}{||c_i||^2}c_i$$

dim $\mathbb{R}_2[x] = 3$ $-1, 0, 1$

Przykład 9.3.5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B} = \big(1,x,x^2\big)$.

Niech $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$. Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem
$1\circ x^2 =$ $b_1\circ b_3 = 1\cdot(-1)^2+1\cdot 0^2+1\cdot 1^2 = 2 \neq 0$.
Niech $\mathcal{C} = (c_1,c_2,c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = 1$.

$c_1 = 1$

$b_2 + \alpha b_1$ $b_1 = c_1$

II KROK: Poszukujemy $\boxed{c_2 = b_2 + \alpha c_1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $c_2\circ c_1 = 0$.
Obliczamy $0 = c_2\circ c_1 = (b_2+\alpha c_1)\circ c_1 = \underbrace{b_2\circ c_1}_{x\circ 1}+\alpha\cdot(c_1\circ c_1) = (-1\cdot1+0\cdot1+1\cdot1)+\alpha(1+1+1) =$ 3α.
$3\alpha = 0$, $\alpha = 0$
Skąd $\alpha = 0$. Zatem $c_2 = b_2 = x$. (Mogliśmy to zauważyć wcześniej.)

$b_1 \perp b_2$

III KROK: Poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \underset{?}{\beta_1}c_1 + \underset{?}{\beta_2}c_2$, $\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$. Dobierzmy β_1, β_2 tak, by $c_3\circ c_1 = 0$ oraz $c_3\circ c_2 = 0$.

Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2 = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \beta_1 \cdot 3$, skąd $\boxed{\beta_1 = -\frac{2}{3}}$.
Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2 = (1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) + \beta_2 \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 1^2) = 2\beta_2$, skąd $\beta_2 = 0$.
Zatem $c_3 = b_3 - \frac{2}{3} c_1 = x^2 - \frac{2}{3}$.
$\mathcal{C} = \left(c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x^2 - \frac{2}{3}\right)$ jest bazą ortogonalną.

$||c_1|| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $||c_2|| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$, $||c_3|| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
Bazą ortonormalną jest układ wektorów
$\mathcal{C}' = \left(c_1' = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c_2' = \frac{c_2}{||c_2||} = \frac{\sqrt{2}}{2} x, c_3' = \frac{c_3}{||c_3||} = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2} x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. WERSORY

Macierzowa metoda ortogonalizacji

Macierz blokowa $[AA^T | A]$

$[A|B]$

Twierdzenie 9.3.6. Niech $u_1, \ldots, u_m$ będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów $u_1, \ldots, u_m$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej $[AA^T|A]$, można doprowadzić ją do postaci $[G|A']$, gdzie $G \in M_m(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy $A' \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne w $\mathbb{E}^n$.

Przykład 9.3.7. Stosując metodę macierzową, zortogonalizujemy układ wektorów $b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4)$ w przestrzeni $\mathbb{E}^3$.

Układ ten jest liniowo niezależny, bowiem $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$.

Układ ten nie jest ortogonalny, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.

$$\begin{array}{rrr|rrr} & & & 1 & 5 & 5 \\ & & & -2 & 5 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 5 & -5 & -3 \\ 5 & 5 & 1 & -5 & 51 & 49 \\ 5 & 4 & 4 & -3 & 49 & 57 \end{array} \qquad A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 51 & 49 \\ -3 & 49 & 57 \end{bmatrix}$$

A^T

A

Macierz blokowa

$$[A \cdot A^T | A] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 51 & 49 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & 49 & 57 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + \frac{3}{5} w_1]{w_2 + w_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 46 & \frac{276}{5} & \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{46}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 3 \end{array}\right]$$

TO SAMO CO WCZEŚNIEJ

Układ ortogonalny $c_1 = (1, -2, 0), c_2 = (6, 3, 1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 3)$.
Jeśli nie używaliśmy operacji $\alpha \cdot w_i$, to na przekątnej macierzy G otrzymujemy $||c_1||^2, ||c_2||^2, ||c_3||^2$.
Zatem $||c_1|| = \sqrt{5}, ||c_2|| = \sqrt{46}, ||c_3|| = \sqrt{\frac{46}{5}}$.

9.4 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń

Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, zaś $S \subset V$ dowolnym podzbiorem.

Definicja 9.4.1. Zbiór $S^\perp := \{v \in V : \forall x \in S \ \langle v, x \rangle = 0\}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym zbioru* S w przestrzeni euklidesowej V. Jeżeli zbiór S jest jednoelementowy tj. $S = \{x\}$, to zbiór $S^\perp$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym wektora* $x \in V$.

Twierdzenie 9.4.2. Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

i) Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, to wówczas $U^\perp$ również jest podprzestrznią liniową.

ii) Dla dowolnego wektora $u \in V$ zbiór $\{u\}^\perp$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

Przykład 9.4.3. W przestrzeni $\mathbb{E}^4$ wyznaczymy wszystkie wektory v ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$.

$\{u\}^\perp = ?$ $(1,0,1,0) \circ (x,y,z,t)$

Niech $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Wówczas $u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$. Zatem $v = (x, y, -x, t)$ oraz $\{u\}^\perp = \{(x, y, -x, t) : \ x, y, t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Definicja 9.4.4. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Jeśli $w \in U^\perp$, to mówimy, że wektor w jest *ortogonalny do podprzestrzeni* U i piszemy $w \perp U$.

Uwaga 9.4.5. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora $w \in V$

$$w \perp U \ \Leftrightarrow \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} \quad w \perp b_i$$

WYSTARCZY SPRAWDZIĆ NA BAZIE

Dowód. Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. Ponadto jeśli dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy $\langle w, b_i \rangle = 0$, to wówczas dla dowolnego $u \in U, u = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_\mathcal{B}$ mamy $\langle w, u \rangle = \alpha_1 \langle w, b_1 \rangle + \ldots + \alpha_n \langle w, b_n \rangle = 0$. Zatem $w \perp U$. $\square$

Przykład 9.4.6. Rozważmy $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, podprzestrzeń $U = \mathbb{R}_1[x]$ oraz $w = 6x^2 - 6x + 1$. Czy $w \perp U$?

$V = \{ax^2+bx+c\}$

$w \perp U = \mathbb{R}_1[x] = \text{lin}\{1, x\} \Leftrightarrow w \perp 1 \wedge w \perp x$

$\langle w, 1 \rangle = \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = 2x^3 - 3x^2 + x\Big|_0^1 = 0$

$\langle w, x \rangle = \int_0^1 (6x^3 - 6x^2 + x)dx = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = 0 \quad$ Zatem $w \perp U$.

$U = \{p \in V : a = 0\}$

Własności dopełnienia ortogonalnego

Twierdzenie 9.4.7. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U, U_1, U_2 jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

i) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^{\perp} \subset U_1^{\perp}$,

ii) $U^{\perp} = (\mathrm{lin} U)^{\perp}$,

iii) $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$.

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową.

Π — rzutowanie
projekcja

Definicja 9.4.8. Operator liniowy $\pi \in End(V)$ dany wzorem

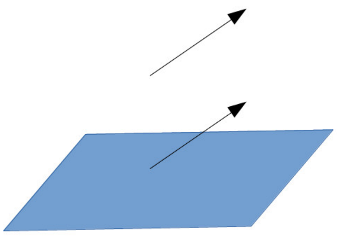
Π_U

$$\forall v \in V \ \pi(v) = u, \quad \text{gdzie} \quad \underbrace{v - u}_{w} \perp U,$$

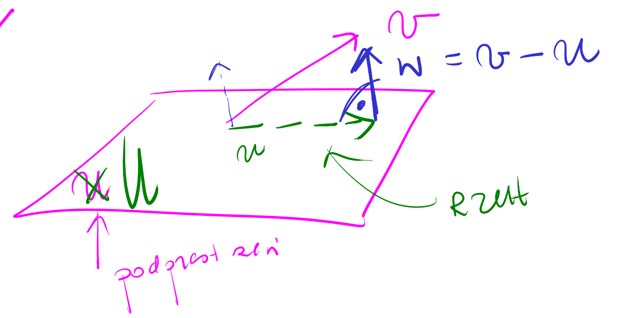
proj

nazywamy *rzutowaniem ortogonalnym* lub *projekcją ortogonalną* na podprzestrzeń U. Obraz wektora v poprzez π nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U.

proj_U



V



Twierdzenie 9.4.9 (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego)**.** Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny $u \in U$ tego wektora na podprzestrzeń U.

i) Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$ jest dowolną bazą podprzestrzeni U, wówczas $u = \pi(v) = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$, gdzie

Macierz Grama

Pokażę na przykładzie

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \langle b_1, b_2\rangle & \ldots & \langle b_1, b_k\rangle \\ \langle b_2, b_1\rangle & \langle b_2, b_2\rangle & \ldots & \langle b_2, b_k\rangle \\ \ldots & & \ldots & \\ \langle b_k, b_1\rangle & \langle b_k, b_2\rangle & \ldots & \langle b_k, b_k\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \langle v, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k\rangle \end{bmatrix}. \tag{1}$$

ii) Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$ jest bazą ortogonalną podprzestrzeni U, wówczas

u - szukam
v - jest dany

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1\rangle}{||b_1||^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2\rangle}{||b_2||^2} b_2 + \ldots + \frac{\langle v, b_k\rangle}{||b_k||^2} b_k.$$

$u \in U \subset V$

$v \in V$

$\mathcal{B}$ - ortogonalna baza

$v = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$

$\alpha_1 = \dfrac{\langle v, b_1\rangle}{||b_1||^2}$

$w = v - u \perp U$

$\forall b_1, \ldots, b_k \ \langle w, b_i\rangle = 0$

$\langle v - u, b_i\rangle = 0$

$\langle v, b_i\rangle - \langle u, b_i\rangle = 0$

$\mathcal{B}$-ortonormalna
$||b_1||=1$ $\quad$ $L_1 = \langle v, b_1 \rangle$

$\langle v, b_i\rangle = \langle u, b_i\rangle$

WAŻNE!

iii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni U, wówczas

$$u = \pi(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + \ldots + \langle v, b_k\rangle b_k.$$

Macierz $\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \langle b_1, b_2\rangle & \ldots & \langle b_1, b_k\rangle \\ \langle b_2, b_1\rangle & \langle b_2, b_2\rangle & \ldots & \langle b_2, b_k\rangle \\ \ldots & & \ldots & \\ \langle b_k, b_1\rangle & \langle b_k, b_2\rangle & \ldots & \langle b_k, b_k\rangle \end{bmatrix}$ występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy *macierzą Grama* układu wektorów $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

Wniosek 9.4.10. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ będzie bazą $\boxed{\text{ortonormalną}}$ podprzestrzeni U, zaś $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ macierzą, której kolumnami są kolejne wektory bazy $\mathcal{B}$. Wówczas AA^T jest reprezentacją macierzową projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń U.

odwz. liniowe $\rightarrow$ ma reprezentację macierzową

Przykład 9.4.11. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^4$ wyznaczymy rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, 1, 0)$ na podprzestrzeń $U = \text{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest bazą U, bowiem $r\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

Stąd $u \in U = \text{lin}\{b_1, b_2\}$

METODA I

rzut v na U

$u := \pi_U(v) = ?$, $\boxed{w := v - u \perp U} \Leftrightarrow w \perp b_1 := (2, 1, 1, 2) \wedge w \perp b_2 := (1, 1, -3, 0)$ $\quad$ $u = \alpha b_1 + \beta b_2$

$u \in U$, zatem istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $u = \alpha b_1 + \beta b_2$. Wówczas $\quad$ $u = ?$

$w = (1, 1, 1, 0) - \alpha(2, 1, 1, 2) - \beta(1, 1, -3, 0) = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha)$ $\quad$ $\alpha, \beta = ?$

$v - u = v - (\alpha b_1 + \beta b_2)$

Otrzymujemy układ dwóch równań

$0 = \langle w, b_1\rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (2, 1, 1, 2) = 4 - 10\alpha$, $= 0$

$0 = \langle w, b_2\rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 - 11\beta$. $= 0$

Stąd $\alpha = \frac{2}{5}$, $\beta = -\frac{1}{11}$ oraz

$u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}} = [\frac{2}{5}, -\frac{1}{11}]_{\mathcal{B}} = \frac{2}{5}b_1 - \frac{1}{11}b_2 = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}) - (\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, 0) = (\frac{39}{55}, \frac{17}{55}, \frac{37}{55}, \frac{4}{5})$ $\quad$ $**$

METODA II

Zauważmy, że baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest ortogonalna.

Istotnie $b_1 \circ b_2 = (2, 1, 1, 2) \circ (1, 1, -3, 0) = 0$. Na mocy twierdzenia 9.2.10 mamy $u = \left[\frac{\langle u, b_1\rangle}{||b_1||^2}, \frac{\langle u, b_2\rangle}{||b_2||^2}\right]$. Ale $\boxed{\langle v, b_i\rangle = \langle u, b_i\rangle}$, zatem $u = \left[\frac{\langle v, b_1\rangle}{||b_1||^2}, \frac{\langle v, b_2\rangle}{||b_2||^2}\right]$. Obliczamy $\langle v, b_1\rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (2, 1, 1, 2) = 4$, $\langle v, b_2\rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (1, 1, -3, 0) = -1$ oraz $||b_1||^2 = 10$, $||b_2||^2 = 11$. Stąd $u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}$.

UWAGA: Gdyby baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ nie była ortogonalna, zawsze możemy metodą Grama-Schmidta ją zortogonalizować i w dalszych rachunkach wykorzystać znalezioną bazę ortogonalną $\mathcal{C} := (c_1, c_2)$.

METODA III

Znajdziemy macierz rzutowania na U. Normalizujemy bazę $\mathcal{B}$. Niech $\mathcal{B}' = \{b_1', b_2'\}$, gdzie

baza ortonormalna

wersory

$b_1' = \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2,1,1,2)$, $b_2' = \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,-3,0)$. Niech $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \end{bmatrix}$. Macierzą projekcji jest $\underbrace{AA^T}_{M_\pi(\mathcal{B}',\mathcal{B}')} = \begin{bmatrix} \frac{27}{55} & \frac{16}{55} & \frac{-4}{55} & \frac{2}{5} \\ \frac{16}{55} & \frac{21}{110} & \frac{-19}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{-4}{55} & \frac{-19}{110} & \frac{101}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$. Stąd $AA^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{55} \\ \frac{17}{55} \\ \frac{37}{55} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

rzut (*)

Interperatacja geometryczna metody Grama-Schmidta

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$ i jej bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ będzie szukaną bazą ortogonalną.

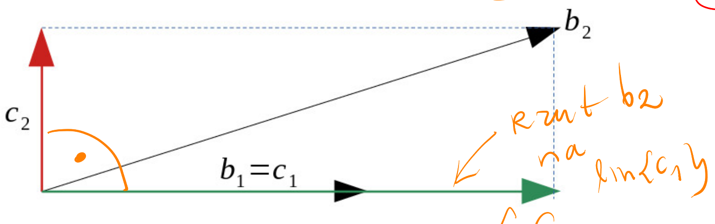
KROK I:

$$c_1 := b_1$$

KROK II:

rzut

$$c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1\rangle}{||c_1||^2} c_1 = b_2 - \pi_{\mathrm{lin}\{c_1\}}(b_1)$$



rzut b_2 na $\mathrm{lin}\{c_1\}$

αc_1

$+\alpha$

$c_2 = b_2 \boxed{-\alpha} c_1$

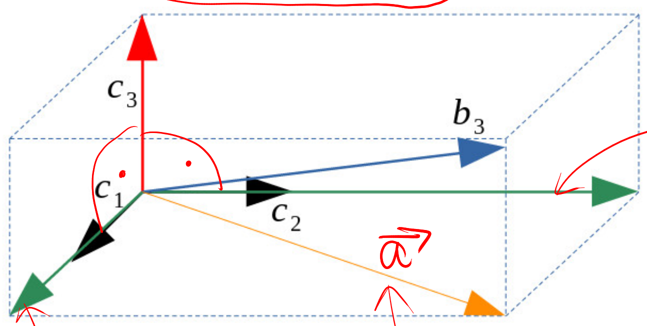
$b_2 = c_2 + \alpha c_1$

KROK III:

$-a$ $\qquad$ $-a$

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1\rangle}{||c_1||^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2\rangle}{||c_2||^2} c_2 = b_3 - \pi_{\mathrm{lin}\{c_1\}}(b_3) - \pi_{\mathrm{lin}\{c_2\}}(b_3) = b_3 - \pi_{\mathrm{lin}\{c_1,c_2\}}(b_3)$$

$c_3 + a = b_3$ $\qquad$ $c_3 = b_3 - a$



rzut b_3 na $\mathrm{lin}\{c_2\}$

$\pi_{\mathrm{lin}\{c_1\}}(b_3) + \pi_{\mathrm{lin}\{c_2\}}(b_3) =$

$= \pi_{\mathrm{lin}\{c_1,c_2\}}(b_3)$

$= \vec{a}$

rzut b_3 na $\mathrm{lin}\{c_1\}$

rzut b_3 na $\mathrm{lin}\{c_1, c_2\}$

$\varphi(v)$

AX

9.5 Macierze ortogonalne i izometrie liniowe

Przykład 9.5.1. $\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Wektor $(1, 0, 0)$ ma długość 1, zaś wektor $(1, 6, 0)$ ma długość $\sqrt{37}$.

Przekształcając dowolne wektory w $\mathbb{R}^n$ za pomocą macierzy przejścia możemy zmienić ich długość oraz kąt między nimi. Wyróżnimy teraz te macierze, które pozostawią powyższe wielkości niezmienione.

Definicja 9.5.2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy *macierzą ortogonalną*, jeśli $\boxed{A^T A = A^T A} = I_n$.

$\|v\| = \|w\| = 1$

$v \circ w = 0$

$A = \begin{array}{c} v \\ w \end{array}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}$

$\|v\|^2$ $\quad v \circ w$ $\quad \|w\|^2$

Przykład 9.5.3. Macierz $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ jest ortogonalna.

Twierdzenie 9.5.4. Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Nazywamy ją *grupą ortogonalną* i oznaczamy symbolem $O(n)$.

Wniosek 9.5.5. i) Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy 1 lub -1.

ii) Wiersze macierzy ortogonalnej są wzajemnie ortogonalnymi wersorami (względem standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^n$). Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla kolumn.

(niewystarczą ortogonalne!)

iii) Niech $(V, \langle ., . \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ to dwie bazy ortonormalne tej przestrzeni. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ jest macierzą ortogonalną. I odwrotnie, dowolna macierz ortogonalna jest macierzą przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi.

$\det A = ?$ $\quad$ A-ortogonalna $\quad$ $\det A \neq \pm 1$

Dowód. i) Wynika to z równości $1 = \det I_n = \det(\underbrace{AA^T}_{I}) = (\det A)^2$. $\square$

$\det A \cdot \det(A^T)$

$\downarrow$ A na pewno nie jest ortogonalna

Niech $(V, \langle ., . \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, skończenie wymiarową. Rozpatrujemy normę zadaną przez iloczyn skalarny.

Definicja 9.5.6. Operator liniowy $\varphi \in \boxed{End(V)}$ nazywamy

endomorfizm

i) *ortogonalnym*, jeśli jego macierz w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną,

IZOMETRIA

ii) *izometrią* $\boxed{\textit{liniową}}$, jeśli zachowuje on odległość, tzn. spełniony jest warunek

$$\forall u, v \in V \quad ||\varphi(u) - \varphi(v)|| = ||u - v||.$$

tzn. izometria + odwz. liniowe

3 $M_\varphi(B,B) = A$ -ortog. $\Rightarrow$ $A' = P^{-1}AP$ ortog. $\forall P$

Stwierdzenie, że macierz φ w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną, jest równoważne stwierdzeniu, że macierz φ w dowolnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną. Wynika to z faktu, że macierz przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi jest macierzą ortogonalną oraz z faktu, że macierze ortogonalne tworzą grupę. Oznacza to, że odwzorowanie ortogonalne to takie odwzorowanie liniowe, które przeprowadza pewną (każdą) bazę ortonormalną przestrzeni V na bazę ortonormalną.

P ortogonalne

$v \in Ker\varphi$ $\quad \varphi(v) = 0_V$

$0 = \|0_V\| = \|\varphi(v)\|$

$\|$ izom.

$\|v\|$

$\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

tzn $v \in Ker\varphi \Rightarrow v = 0$

dim $V = n$

Uwaga 9.5.7. Niech $\varphi \in End(V)$ będzie izometrią liniową. Wówczas

$Ker\varphi = \{0\}$

i) φ jest monomorfizmem, a zatem jest izomorfizmem.

dim $Ker\varphi = 0$ $\quad$ dim $Im\varphi = n - 0 = n =$ dim V

ii) $Spec(\varphi) \subset \{-1, 1\}$

$\|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

Twierdzenie 9.5.8. Niech $\varphi \in End(V)$. Następujące warunki są równoważne.

i) φ jest izometrią liniową.

ii) φ *zachowuje normę* tzn. $\forall v \in V$ $||\varphi(v)|| = ||v||$.

iii) φ *zachowuje iloczyn skalarny* tzn. $\forall u, v \in V$ $\langle u, v\rangle = \langle\varphi(u), \varphi(v)\rangle$.

iv) φ jest operatorem ortogonalnym

$v \circ w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\angle(v, w)$

Wniosek 9.5.9. Izometrie liniowe *zachowują kąty*, tzn. jeżeli kąt pomiędzy wektorami u i v wynosi α, to kąt pomiędzy wektorami $\varphi(u)$ i $\varphi(v)$ również wynosi α.

Przykład 9.5.10. Rozważmy $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Czy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-x + y, y)$ jest izometrią liniową?

tzn. $A = M_\varphi$ jest ortogonalna ?

Baza standardowa jest bazą ortonormalną, gdy rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Wyznaczmy macierz A endomorfizmu φ w tejże bazie.

$A^T A = I$

Otrzymujemy $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sprawdźmy, czy A jest ortogonalna.

Łatwiej sprawdzić niż $\|v - w\| = \|\varphi(v) - \varphi(w)\|$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq I$$

Zatem φ nie jest izometrią liniową.

Uwaga 9.5.11. Jeśli rozpatrujemy niestandardowy iloczyn skalarny, baza kanoniczna nie musi być ortonormalna. Nie zawsze zatem wystarczy badać macierz w bazie kanonicznej.

Izometrie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym

Jeśli $v = (v_x, v_y, v_z)$ jest wektorem w $\mathbb{R}^3$, to symbolem v^T oznaczamy odpowiadający mu wektor kolumnowy $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$.

X v^T

$\boxed{\mathbf{n = 1}}$

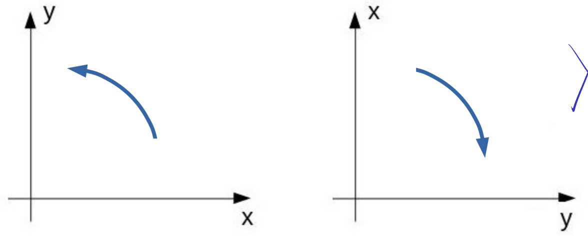
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest linowe, zatem $\varphi(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$
φ jest izometrią, zatem $|x| = |ax| = |a| \cdot |x|$ oraz $a = \pm 1$.
Otrzymujemy dwie izometrie liniowe $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, czyli $\varphi_1(x) = x$ oraz φ_2 takie, że $\varphi_2(x) = -x$.

$\varphi_2 = -\mathrm{id}$

$\boxed{\mathbf{n = 2}}$ To zrozumieć! (Na płaszczyźnie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)

Orientacja płaszczyzny

Jeśli obrót osi Ox dookoła punktu O o kąt $\frac{\pi}{2}$ doprowadzający do pokrycia się jej z osią Oy odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to mówimy, że układ jest *prawoskrętny (zorientowany dodatnio)*, a jeśli zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to *lewoskrętny*. O płaszczyźnie, na której ustalono kierunek dodatni obrotu, mówimy, że została *zorientowana*.



układ prawoskrętny układ lewoskrętny

Poniżej rozważamy płaszczyznę zorientowaną dodatnio.

Podejście algebraiczne
Z założenia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest linowe, zatem możemy rozważyć jego macierz w bazie standardowej $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Wiemy, że macierz A jest ortogonalna oraz $\det A = \pm 1$.

Z równości $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^T A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & \cancel{ab + cd}\ ac+bd \\ \cancel{ab + cd}\ ac+bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$

otrzymujemy układ równań $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ \cancel{ab + cd}\ ac+bd = 0 \end{cases}$.) *

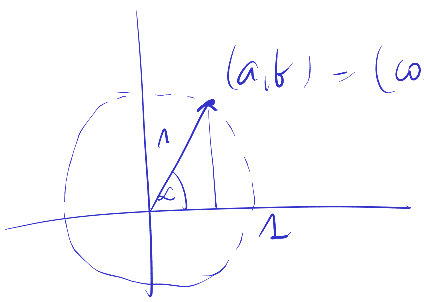
* wersory

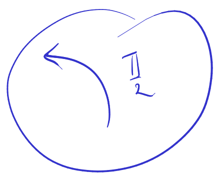
$(a, b) \circ (c, d) = 0$

Punkty $(a, b), (c, d)$ leżą na okręgu jednostkowym, zatem istnieje taki kąt α, że $a = \cos\alpha$ oraz $b = \sin\alpha$. Wówczas na mocy warunku ortogonalności $\cancel{ab + cd} = 0$ mamy,

$ac + bd = 0$

$(a, b) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$





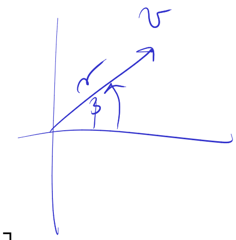
$(a, b) \perp (c, d)$

obrót

że $c = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$, $d = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ lub też $c = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$, $d = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$. Podsumowując,

(1) $$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad lub \quad A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$ (2)

$\det A = 1$ $\qquad$ $\det A = -1$



1) W pierwszym przypadku $\det A = a^2 + b^2 = 1$. Niech $v = (x, y) = (r\cos\beta, r\sin\beta)$. Obliczamy $\varphi(v)$.

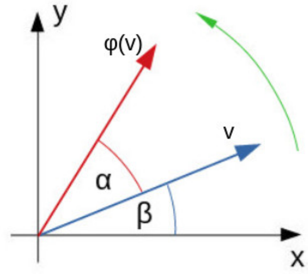
$\varphi \sim A$ $\qquad$ $\varphi(v)$ $\qquad$ $A \cdot v$?

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

długość bez zmian

$\beta \longmapsto \alpha + \beta$

Mamy do czynienia z *rotacją (obrotem) o kąt α* wokół punktu $(0,0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jeśli kąt α jest dodatni). Odwzorowanie oznaczamy symbolem R_α lub $R(\alpha)$.



$\varphi^{-1} \sim A^{-1}$

Macierzą obrotu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (obrotu o kąt $-\alpha$) będzie

$A \cdot A^T = I$

$\det A = \pm 1 \neq 0$

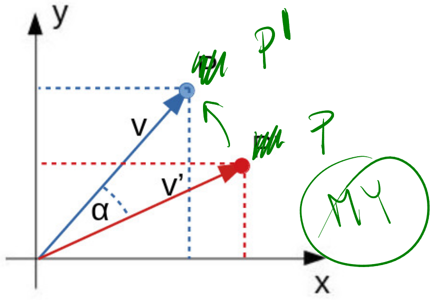
$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

$A^T = A^{-1}$

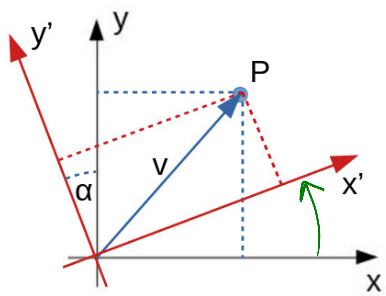
geometria

Zauważmy jeszcze, że $\det(A - tI) = (a-t)^2 + b^2$ i $Spec(A) = \varnothing$. Macierz A nie jest diagonalizowalna. Ponadto *rotacja nie zmienia orientacji* układu współrzędnych.

Uwaga 9.5.12. (1) W naszych rozważaniach przyjęliśmy prawoskrętny układ współrzędnych i obracaliśmy wektor (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Gdybyśmy zmienili układ na lewoskrętny, ruch odbywałby się w przeciwnym kierunku. Alternatywne podejście (2) używa obrotu osi układu współrzędnych. Wówczas wyliczona macierz obrotu reprezentuje obrót osi o ten sam kąt ale w przeciwnym kierunku (zgodnie ze wskazówkami zegara).



Punkt (wektor) zmienia swoje położenie. Zmieniają się jego współrzędne w układzie współrzędnych.



ALTERNATYWNIE

Punkt (wektor) są nieruchome. Obracamy układ współrzędnych, tzn. dokonujemy zmiany bazy. W nowej bazie punkt ma nowe współrzędne.

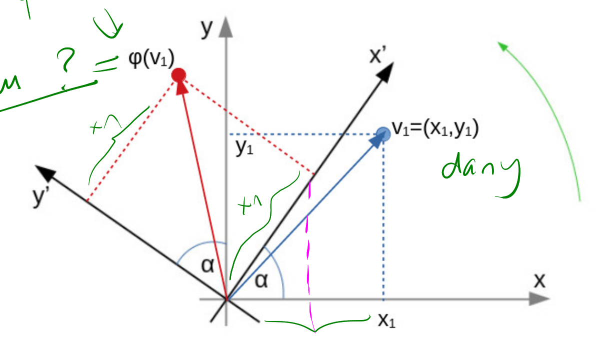
Współrzędne punktu P' w "starej bazie" (rysunek po lewej) są takie same, jak współrzędne punktu P w "nowej bazie" (rysunek po prawej).

Podejście geometryczne

Obrotem układu współrzędnych o kąt α nazywamy obrót bez zmiany początku układu oraz bez zmiany jednostek miary wzdłuż wszystkich osi.

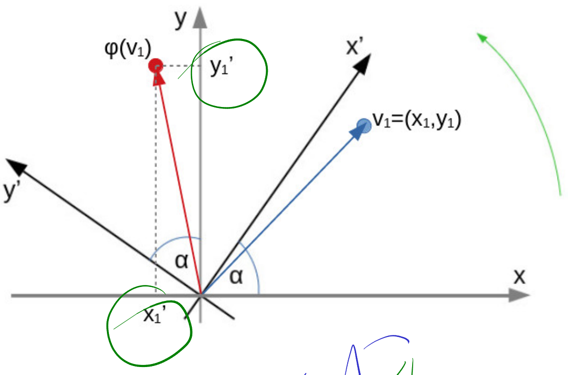
po obrocie

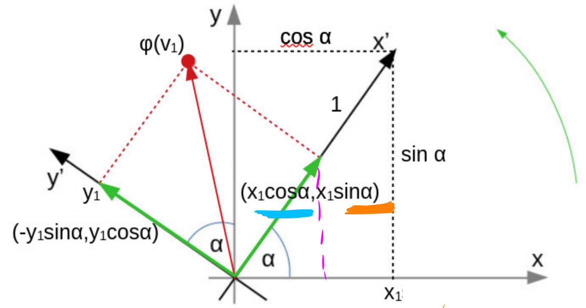
szukam ? =



dany

x_1





to wersor

Tw. Talesa: $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{x_1}{1} \Rightarrow a = x_1\cos\alpha$

$(x_1\cos\alpha, x_1\sin\alpha) + (-y_1\sin\alpha, y_1\cos\alpha) = \varphi(v_1) = (x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)$

$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{x_1}{1} \Rightarrow b = x_1\sin\alpha$

Przykład 9.5.13.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{identyczność, tj. rotacja o kąt miary } 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \tfrac{\pi}{2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \pi$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \tfrac{3}{2}\pi$$

y x

$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

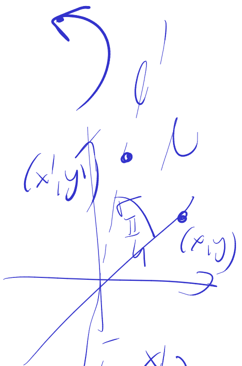
Spr. $A \cdot A^T = I \Rightarrow$ izom. liniowa

rotacja α

Przykład 9.5.14. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Obliczając wyznacznik $\det A = 1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje rotację. Znajdziemy kąt obrotu.

Ponieważ $\boxed{\cos\alpha = -\frac{1}{2}}$, zatem α ma miarę $\frac{2}{3}\pi$ lub $\frac{4}{3}\pi$. Ponadto $\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zaś $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem jest to obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt $\frac{2}{3}\pi$ lub (równoważnie) obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt $\frac{4}{3}\pi$.



Przykład 9.5.15. Wyznaczymy równanie prostej l' powstałej przez obrót prostej l o równaniu $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ o kąt $\frac{\pi}{4}$.

Obliczamy $x' = x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$, $y' = x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$. Dodając i odejmując równania stronami, obliczamy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')$. Wstawiając do równania $\boxed{y = mx}$, otrzymujemy $-x' + y' = m(x'+y')$. Zatem $(1-m)y' = (1+m)x'$. Równaniem prostej obróconej jest $\boxed{(m+1)x + (m-1)y = 0}$.

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

2) W drugim przypadku $\det A = -1$. Obliczamy

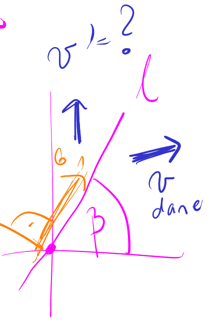
$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & -a-t \end{vmatrix} = -(a-t)(a+t) - b^2 = t^2 - a^2 - b^2 = t^2 - 1.$$

Zatem $Spec(A) = \{-1, 1\}$ i macierz A jest diagonalizowalna. W bazie wektorów własnych macierz operatora φ jest postaci $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Niech $v = (x, y)$. Obliczamy współrzędne $\varphi(v)$ w bazie wektorów własnych.

$$D\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

P-ortogonalna

Mamy do czynienia z *symetrią ortogonalną (odbiciem) względem prostej* $y = 0$. $A = P^{-1}DP$, gdzie P to macierz przejścia do bazy wektorów własnych. Zmiana bazy oznacza zmianę układu współrzędnych z zachowaniem początku układu współrzędnych (bo przekształcenie jest liniowe). Zatem $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ jest symetrią ortogonalną względem pewnej prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$. Jaka to prosta?



Podejście algebraiczne
Przypuśćmy, że l jest prostą o równaniu $\boxed{y = \mathrm{tg}\beta \cdot x}$. Aby znaleźć odbicie wektora v względem l posłużymy się inną bazą ortonormalną. Pierwszy wektor bazowy b_1 będzie wersorem leżącym na prostej l, a drugi b_2 będzie wersorem do niego prostopadłym. Zatem $b_1 = (\cos\beta, \sin\beta)$, $b_2 = (-\sin\beta, \cos\beta)$. Istnieją skalary $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $v = c_1 b_1 + c_2 b_2$. Obliczamy

$$v^T = c_1\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}}_{b_1} + c_2\underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix}}_{b_2} = \begin{bmatrix} c_1\cos\beta - c_2\sin\beta \\ c_1\sin\beta + c_2\cos\beta \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}$$

$y = ax + 0$
$y = ax$
$y = \mathrm{tg}\beta \cdot x$

Podobnie obliczamy $\varphi(v) = c_1 b_1 - c_2 b_2$.

$$\varphi(v)^T = c_1\begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} - c_2\begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\cos\beta + c_2\sin\beta \\ c_1\sin\beta - c_2\cos\beta \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}$$

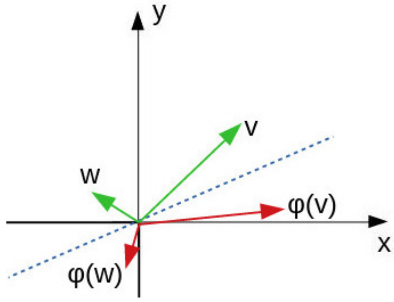
Stąd

$$\varphi(v)^T = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} v^T =$$

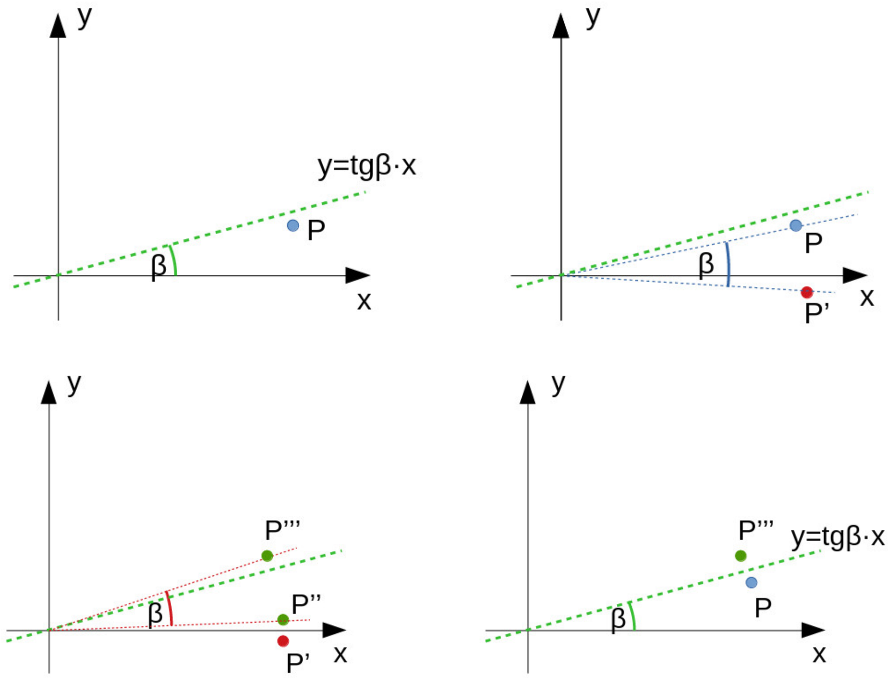
Transponuj

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} v^T = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} v^T$$

Czyli $\boxed{\alpha = 2\beta}$ i macierz $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ reprezentuje odbicie względem prostej o równaniu $\boxed{y = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot x}$.



Podejście geometryczne



1) Obracamy punkt o kąt $-\beta$. → Transponowane

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

(x, y)

$\downarrow$

$(x, -y)$

2) Dokonujemy odbicia względem prostej $y = 0$. Oś Ox

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Obracamy punkt o kąt β.

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

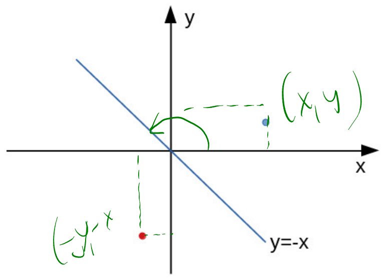
4) Otrzymujemy

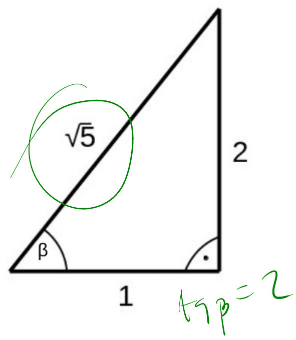
$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} =$$

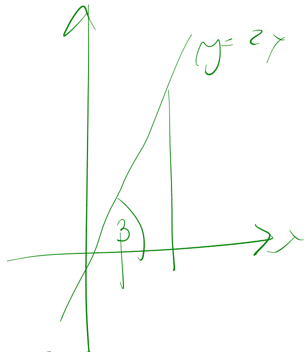
$$= \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}.$$

Wniosek 9.5.16. Izometria liniowa płaszczyzny jest rotacją (obrotem) wokół punktu $(0,0)$ o pewien kąt lub symetrią ortogonalną (odbiciem) względem pewnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

Przykład 9.5.17. Macierzą symetrii ortogonalnej względem prostej $y = -x$ jest macierz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Otrzymujemy $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$.







Przykład 9.5.18. Wyznaczymy macierz izometrii liniowej płaszczyzny będącej symetrią ortogonalną względem prostej $y = 2x$.

METODA I: Jeśli tg$\beta = 2$, to wówczas $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Obliczamy $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{4}{5}$ oraz $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = -\frac{3}{5}$. Otrzymujemy

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ ? \end{bmatrix}$

A

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

METODA II: Niech F oznacza poszukiwaną macierz, zaś F_0 macierz odbicia względem prostej $y = 0$. Wówczas $F = R(\beta)F_0R(-\beta)$. Ponieważ $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, zatem

oś OX

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

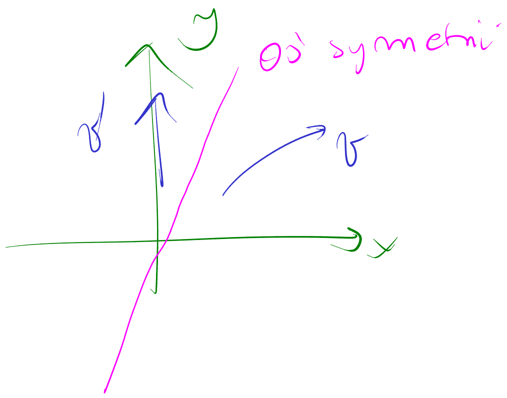
$\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$ $\quad$ $\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

Uwaga 9.5.19. Składaniu odwzorowań odpowiada mnożenie reprezentujących ich macierzy w pewnej ustalonej bazie. Geometrycznie oznacza to, że układ współrzędnych jest nieruchomy, a obrotowi/odbiciu podlegają wektory.

Przykład 9.5.20. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Spr. $A \cdot A^T = I$ czyli to izometria

Obliczając wyznacznik det$A = -1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje odbicie. Znajdziemy oś symetrii.

?



Punkty na osi symetrii nie zmieniają swego położenia w wyniku obicia. Są to punkty (x, y) spełniające równanie $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
Otrzymujemy układ równań $\begin{cases} 3x + 4y &= -5x \\ -4x + 3y &= 5y \end{cases}$.
Zatem prosta $y = -2x$ jest osią symetrii.

Uwaga 9.5.21. Symetria ortogonalna φ jest *inwolucją*, tzn. spełnia warunek $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Równoważnie, jeśli A jest macierzą odbicia φ, to wówczas $A^2 = I$ lub inaczej $A^{-1} = A$.

9.6 Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznych

→ P - może być wybrana jako ortogonalna

Twierdzenie 9.6.1. i) Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym rzeczywistej macierzy symetrycznej są wzajemnie ortogonalne.

ii) Każdej wartości własnej o krotności algebraicznej k rzeczywistej macierzy symetrycznej odpowiada k liniowo niezależnych wektorów własnych. → JEST DIAGONALIZOW.

Kr. alg = kr. geom

Wniosek 9.6.2 (Twierdzenie spektralne dla rzeczywistej macierzy symetrycznej)**.** Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ istnieje macierz diagonalna $D \in M_n(\mathbb{R})$ oraz macierz ortogonalna $P \in O(n)$ takie, że

$$P^{-1}AP = P^TAP = D.$$

Mówimy wówczas, że macierz A jest *ortogonalnie diagonalizowalna.*

Diagonalizacja macierzy za pomocą macierzy ortogonalnych:

1) Znajdujemy wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

2) Normalizujemy wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym o krotności algebraicznej równej 1.

3) Wektory własne odpowiadające wartości własnej o krotności algebraicznej większej niż 1 dobieramy w taki sposób, by były ortogonalne i następnie normalizujemy.

Wiemy że są lin. niezal
Dodajemy Rachunek
ORtogonal. G-S

$A = A^T$ A - s !

Przykład 9.6.3. Macierz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ jest symetryczna, a zatem ortogonalnie diagonalizowalna. Obliczamy $\chi_A(t) = \det(A - tI) = -t(t-6)^2$.
$Spec(A) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6\}$, przy czym $k_1 = 1, k_2 = 2$.

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\begin{cases} x = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. Zatem $E_0 = \{(x, -2x, x), x \in \mathbb{R}\}$.
Wybieramy wektor własny $u = (1, -2, 1)$ i normalizujemy go $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. !

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - 2y + z = 0.$$

Zatem $E_6 = \{(2y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$.
Wybieramy wektory własne $v = (2, 1, 0)$, $w = (-1, 0, 1)$. W $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny. Oczywiście $\langle u, v \rangle = 0$ oraz $\langle u, w \rangle = 0$.
Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = -2 \neq 0$, zatem v i w nie są do siebie ortogonalne. Zortogonalizujemy układ $\{v, w\}$ metodą Grama-Schmidta.

Niech $c_1 := v$. Poszukujemy $c_2 = w + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $\langle c_2, c_1 \rangle = 0$.
Obliczamy $\langle c_2, c_1 \rangle = \langle w + \alpha c_1, c_1 \rangle = \langle w, c_1 \rangle + \alpha \langle c_1, c_1 \rangle = (-2 + 0 + 0) + \alpha(4 + 1 + 0)$.
Skąd $5\alpha - 2 = 0$, czyli $\alpha = \frac{2}{5}$ oraz $c_2 = w + \frac{2}{5}v = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

$c_1 \perp c_2$

Mamy $\langle c_1, c_2 \rangle = 0$. Normujemy wektory $\hat{c}_1 = \frac{c_1}{|c_1|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$, $\hat{c}_2 = \frac{c_2}{|c_2|} = \sqrt{\frac{5}{6}}(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

Baza (c_1', c_2', c_3') jest orto normalna

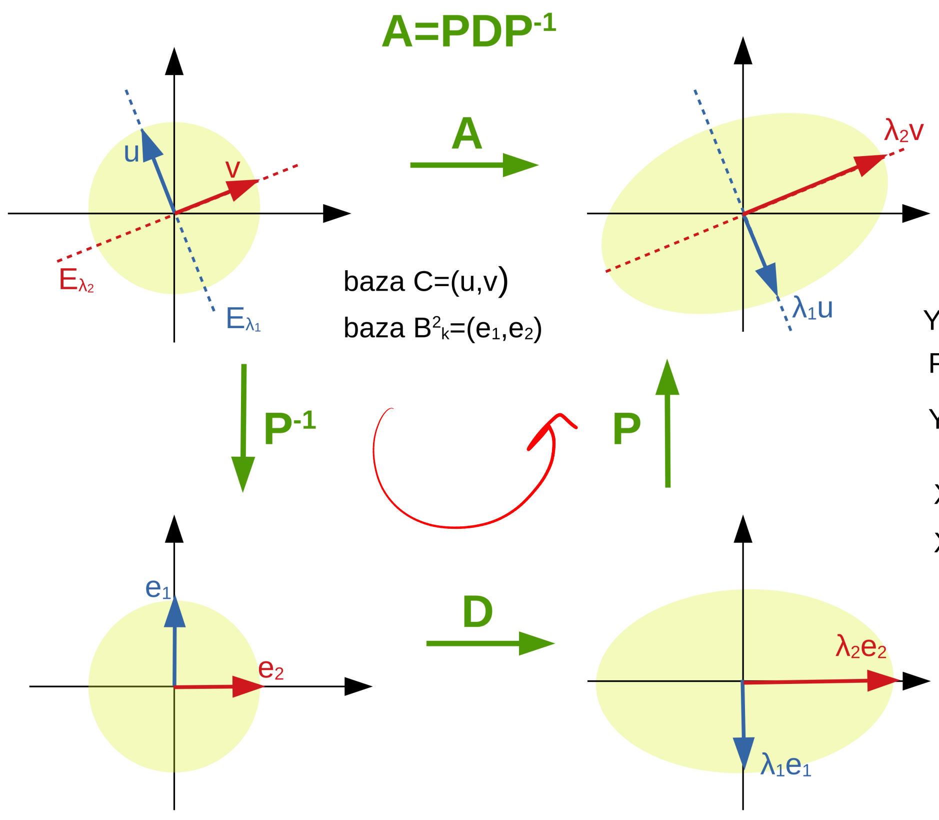
Rozważamy bazę $(\hat{u}, \hat{c}_1, \hat{c}_2)$. Macierz diagonalizująca ma postać $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{5\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

Można sprawdzić, że $PP^T = I$, zatem $P \in O(3)$ oraz $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

wersory wzajemnie ortogonalne

Tzn. P-ortogonalna

Uwaga 9.6.4. Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznej może być widziana jako *rotacja osi układu współrzędnych* w taki sposób, *aby były one równoległe do wektorów własnych*. Zobacz tutaj.



$Y=AX$

$P=P_{B^2_k \to C}$

$Y'=DX'$

$X'=PX$

$X=P^{-1}X'$

$D\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$