Algebra - Zad. domowe nr. 2 - Macierze i ukł. równań liniowych

Zad. 1 $D_m(\mathbb{R})$ - zbiór macierzy diagonalnych stopnia m o elementach rzeczywistych

$Z \subset D_m(\mathbb{R})$ $\quad Z := \{A \in D_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$

$A \in Z \Rightarrow A$ - diagonalna $\wedge \det A \neq 0 \Rightarrow$ na diagonali nie ma zer

- Iloczyn macierzy diagonalnych jest macierzą diagonalną $\quad A, B \in Z \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$
  tzn. mnożenie jest wewnętrzne
- Mnożenie macierzy jest łączne
- I_m - diagonalna, $\det I_m = 1 \Rightarrow I_m \in Z$ oraz $\forall A \in Z \; I_n A = A I_n = A$ tj. I_n element neutralny

$A'A = A \cdot A' = I \;\wedge\; A = [a_{11} \dots a_{nn}] \Rightarrow A' = [1/a_1 \dots 1/a_m] \quad a_k \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a_k} \neq 0 \Rightarrow A' \in Z$

- Mnożenie macierzy diagonalnych jest przemienne

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{nn} \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm}b_{mm} \end{bmatrix} = BA$$

Stwierdzenie fałszywe → grupa <u>przemienna</u>.

Zad. 2 a) $A \in M_6(\mathbb{R}) \quad A^3 - 4A^T = 0$

$A^3 = 4A^T \Rightarrow \det(A^3) = \det(4A^T) \Rightarrow (\det A)^3 = 4^6 \det A \Leftrightarrow \det A \cdot (4^6 - (\det A)^2) = 0$

$\det A = 0 \vee \det A = 4^3 = 64 \vee \det A = -64$

b) $B, C \in M_4(\mathbb{R}) \quad \det B = 16$, $\quad B \rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \leftrightarrow k_4 \\ \frac{1}{4} w_3 \\ w_1 + w_2 \end{pmatrix} \rightarrow C \quad \det C = (-1) \cdot \frac{1}{4} \det B = -4$

c) $D, E \in M_3(\mathbb{R})$

$\det D = 5$

$\det(DE) = 3$

$F = E^{-1} \cdot D^{-1} \cdot 2 \cdot D^T$

$$\det F = \det(E^{-1}D^{-1} \cdot 2 \cdot D^T) = 2^3 \underset{\det((DE)^{-1})}{\underset{\parallel}{\det(E^{-1}D^{-1})}} \cdot \underset{\det D}{\underset{\parallel}{\det(D^T)}}$$

$$= \frac{8}{\det(DE)} \cdot \det D = \frac{8}{3} \cdot 5 = \underline{\underline{\frac{40}{3}}}$$

Zad. 6

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x - y = a \\ x + y = a \end{cases} \qquad U = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ a \\ a \end{matrix} \end{array}\right]$$

$\det U = -a^2 + a + 2 + 1 - a^2 - 2a = -2a^2 - a + 3 = -(2a+3)(a-1)$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -\frac{3}{2}\} \quad \det U = 3 \rightarrow$ ukł. sprzeczny

$a \in \mathbb{R}\{1, -\frac{3}{2}\} \quad r(U) = r(A) = 2 \rightarrow$ oznaczony

Ⓟ a) $\forall a < -2$ sprzeczny

Ⓟ b) ukł. ozn. $\Rightarrow a = 1 \vee a = -\frac{3}{2}$

Ⓕ c) Można wybrać a, by był nieoznaczony

Algebra – Zad. domowe nr. 2 – Macierze i ukł. równań liniowych

Zad. 4 Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3w = 0 \\ 3x + 4y + 5z + 4w = 4 \\ 4x + 5y + 6z + 3w = 5 \\ 5x + 3y + 9z + 9w = -9 \end{cases}$$

$$[A|U] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 9 & 9 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-4w_1 \\ w_5-5w_1}]{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -6 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-w_2 \\ w_4+2w_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4-3\cdot w_3 \\ w_3\cdot(-1)}]{}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4\cdot(-\frac{1}{4})]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-4w_4 \\ w_2+5w_4 \\ w_1-3w_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_2+w_3 \\ w_1-2w_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_1-w_2]{} \left[\begin{array}{c|c} I_4 & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right]$$

Odp. $x=3, y=4, z=-5, w=1$

ukł. oznaczony

Zad. 5 Ilości rozwiązań w zależności od $p \in \mathbb{R}$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3p & 6 & 3 & 0 & 6 \\ p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ p & 2 & \frac{p-1}{2} & 1 & 1 \\ 2p & 4 & & p-3 & 2p-2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ p & 2 & \frac{p-1}{2} & 1 & 1 \\ 2p & 4 & & p-3 & 2p-2 \\ 3p & 6 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_2-w_1 \\ w_3-2w_1 \\ w_4-3w_1}]{}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1-p & p-4 & 0 & -5 \\ 0 & 2-2p & -4 & p-5 & 2p-14 \\ 0 & 3-3p & -6 & -3 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-2w_2 \\ w_4-3w_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1-p & p-4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4-2p & p-5 & 2p-4 \\ 0 & 0 & 6-3p & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3\cdot\frac{1}{2} \\ w_4\cdot\frac{1}{3}}]{}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1-p & p-4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2-p & \frac{1}{2}p-\frac{5}{2} & p-2 \\ 0 & 0 & 2-p & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4-w_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1-p & p-4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2-p & \frac{1}{2}p-\frac{5}{2} & p-2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}p+\frac{3}{2} & 3-p \end{array}\right]$$

$p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$ układ oznaczony $r(U) = r(A) = 4 = n$

jedno rozw.

$$p=0 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_2-w_1 \\ w_4\cdot\frac{2}{3}}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_2+w_4 \\ w_3+\frac{5}{2}w_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$-2 + \frac{5}{2} \cdot 2 = 3$

$2z = 3$

$7z = 9$

Sprzeczny!

$$p=1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \leftrightarrow w_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+3w_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} w=2 \\ 6w=8 \end{cases} \quad \text{sprzeczny}$$

$$p=2 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \quad \text{sprzeczny} \begin{cases} z=0 \\ \frac{1}{2}z=1 \end{cases} \quad \text{brak rozw.}$$

$$p=3 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad r(U)=r(A)=3 < n=4$$

ukł. nieoznaczony

Nieskończenie wiele rozw.
zależnych od 1 parametru

Zad. 3

$$(X+I)^T \cdot A = 2A - I \quad / \cdot A^{-1}$$

$$(X+I)^T = (2A-I)A^{-1} = 2I - A^{-1} \quad /^T$$

$$X+I = (2I-A^{-1})^T = 2I - (A^{-1})^T$$

$$X = I - (A^{-1})^T$$

$$A \in M_4(\mathbb{R})$$

$$A = [a_{ij}]$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i+j & ; \; i=j \\ 3 & ; \; i \neq j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 12 \end{bmatrix} \qquad A = 3 \cdot B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = (3B)^{-1} = 3^{-1} \cdot B^{-1} = \frac{1}{3} \cdot B^{-1} \qquad B^{-1} = ?$$

$$[B|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_2-w_1 \\ w_3-w_1 \\ w_4-w_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3 \cdot \frac{1}{2} \\ w_4 \cdot \frac{1}{3}}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_1-w_4]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_1-w_2-w_3]{} \left[\begin{array}{c|cccc} & 17/6 & -1 & -\frac{1}{2} & -1/3 \\ I & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ & \underbrace{-1/3 \quad 0 \quad 0}_{B^{-1}} & & & 1/3 \end{array}\right]$$

$$X = I - \left(\frac{1}{3}B^{-1}\right)^T = I - \frac{1}{3} \cdot (B^{-1})^T = I - \begin{bmatrix} 17/18 & -1/3 & -1/6 & -1/9 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/6 & 0 \\ -1/9 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$$