ALGEBRA – Zadanie domowe nr 4 – Przestrzenie wektorowe

Zad. 1 Czy to podprzestrzeń liniowa?

a) $\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{U} = \{(x,y) : x = 4y^2\}$ NIE $(4,1) \in \mathcal{U} \wedge (16,2) \in \mathcal{U}$
ale $(4,1) + (16,2) = (20,3) \notin \mathcal{U}$ bo $20 \neq 4 \cdot 3^2$

b) $\mathbb{R}^3 \supset \mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 = 0\}$ $x^2 + y^4 = 0 \iff x^2 = 0 \wedge y^4 = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$
Zatem $\mathcal{U} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$
Jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}^3$ $\forall (0,0,z_1), (0,0,z_2) \in \mathcal{U}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$$\alpha(0,0,z_1) + \beta(0,0,z_2) = (0,0,\alpha z_1 + \beta z_2) \in \mathcal{U}$$

c) $\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(1 - x^2 - y^2) \geq 0\}$

$\ln(1 - x^2 - y^2) \geq 0 = \ln 1 \iff 1 - x^2 - y^2 \geq 1 \iff x^2 + y^2 \leq 0 \implies x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$
Zatem $\mathcal{U} = \{(0,0)\}$ i jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}^2$ (trywialna)

d) $\mathbb{R}^4 \supset \mathcal{U} = \{(2x, x+y, 0, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$
NIE jest to podprz. liniowa
$x = y = 0$ $(0,0,0,1) \in \mathcal{U}$
$x = y = 1$ $(2,2,0,1) \in \mathcal{U}$
$(0,0,0,1) + (2,2,0,1) = (2,2,0,\underset{\neq 1}{2}) \notin \mathcal{U}$

e) $\mathbb{R}^3 \supset \mathcal{U} = \{(x,y,z) : x + 2y - 3z = 0$ lub $3x - 2y = 0\}$
NIE jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}^3$
$(2,3,5) \in \mathcal{U}$ bowiem $3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$
$(8,8,8) \in \mathcal{U}$ bowiem $8 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 0$
$(2,3,5) + (8,8,8) = (10,11,13) \notin \mathcal{U}$ bowiem $3 \cdot 10 - 2 \cdot 11 \neq 0 \wedge 10 + 2 \cdot 11 - 3 \cdot 13 \neq 0$

f) $\mathbb{R}[x] \supset \mathcal{U} = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f = 11\}$ Nie jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}[x]$
$f(x) = x^{11} + 10$, $g(x) = -x^{11} - x^2$ $f \in \mathcal{U}$, $g \in \mathcal{U}$
$f + g \notin \mathcal{U}$ bowiem $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 10 - x^2$, $\deg(f+g) = 2 \neq 11$

Zad. 2 a) Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ układ $\{u, v, w\}$ jest liniowo niezależny?
$u = (1,0,2,1,2)$, $v = (2,1,1,2,1)$, $w = (5,1,7,5,p) \in \mathbb{R}^5$

$$r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 5 & p \end{bmatrix} \underset{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 5w_1}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & p-10 \end{bmatrix} \underset{w_3 - w_2}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-7 \end{bmatrix}$$

dla $p \neq 7$ układ liniowo niezależny

b) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - 5y - z + 4t = x - 6y + z + 5t = 0\}$ Baza W?

$$\begin{cases} x - 5y - z + 4t = 0 \\ x - 6y + z + 5t = 0 \end{cases}$$
Dodając stronami $\rightarrow$ $2x - 11y + 9t = 0$ $\rightarrow$ $x = \frac{11}{2}y - \frac{9}{2}t = 11z + t$
Odejmując stronami $\rightarrow$ $y - 2z - t = 0$ $\rightarrow$ $y = 2z + t$

$W = \{(11z + t, 2z + t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\} = \{(11,2,1,0)z + (1,1,0,1)t ; z, t \in \mathbb{R}\}$
$= \operatorname{lin}\{(11,2,1,0), (1,1,0,1)\}$
liniowo niezależne $\rightarrow$ baza $\{(11,2,1,0), (1,1,0,1)\}$

c) $\{u_1, u_2\}$ uzupełnić do bazy $\mathbb{R}^4$
$u_1 = (1,2,3,4)$, $u_2 = (2,4,7,0)$
Niech $u_3 = (a,b,c,d)$, $u_4 = (x,y,z,t)$
$\dim \mathbb{R}^4 = 4 \implies \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ to baza $\mathbb{R}^4$ wtw gdy jest liniowo niezależny

$$\iff 4 = r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \\ a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \underset{w_2 - 2w_1}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix}$$

Wystarczy wybrać $u_3 = (0,1,0,0)$, $u_4 = (0,0,0,1)$

Zad. 2

d) $\mathcal{U} = \text{lin}\{(1,3,2,1), (1,2,1,1), (1,1,0,1), (1,2,2,1), (3,4,1,3)\} \subset \mathbb{R}^4$

- Baza i wymiar $\mathcal{U}$?
- Czy $v = (4,10,9,4) \in \mathcal{U}$? Jego współrzędne w bazie $\mathcal{U}$?

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim \mathcal{U} \leq 4 \longrightarrow$ 5 generatorów. Nie mogą być liniowo niezależne.

$$r\begin{bmatrix} 1&3&2&1\\ 1&2&1&1\\ 1&1&0&1\\ 1&2&2&1\\ 3&4&1&3 \end{bmatrix} \underset{\substack{w_4-w_1\\ w_5-3w_1}}{\overset{\substack{w_2-w_1\\ w_3-w_1}}{=}} r\begin{bmatrix} 1&3&2&1\\ 0&-1&-1&0\\ \cancel{0}&\cancel{-2}&\cancel{-2}&\cancel{0}\\ 0&-1&0&0\\ \cancel{0}&\cancel{-5}&\cancel{-5}&\cancel{0} \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1&3&2&1\\ 0&-1&-1&0\\ 0&-1&0&0 \end{bmatrix} \underset{w_2 \leftrightarrow w_3}{=} r\begin{bmatrix} 1&3&2&1\\ 0&-1&0&0\\ 0&-1&-1&0 \end{bmatrix} \underset{w_3-w_2}{=} r\begin{bmatrix} 1&3&2&1\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&-1&0 \end{bmatrix} = 3$$

Baza $\mathcal{U}$: $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ $\quad b_1 = (1,3,2,1)$, $b_2 = (0,1,0,0)$, $b_3 = (0,0,1,0)$

$\dim \mathcal{U} = 3$

Czy $v \in \mathcal{U}$?

$$r\begin{bmatrix} 1&3&2&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 4&10&9&4 \end{bmatrix} \underset{w_4-4w_1}{=} r\begin{bmatrix} 1&3&2&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-2&1&0 \end{bmatrix} \underset{w_4+2w_2}{=} r\begin{bmatrix} 1&3&2&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v \in \mathcal{U}$$

bo $\{v, b_1, b_2, b_3\}$ liniowo zależny

$v = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}}$ $\qquad v = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = (4,10,9,4)$

$\alpha(1,3,2,1) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,0) = (\alpha,\ 3\alpha+\beta,\ 2\alpha+\gamma,\ \alpha) = (4,10,9,4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ 3\alpha+\beta = 10 \\ 2\alpha+\gamma = 9 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \beta = 10-3\alpha = -2 \\ \gamma = 9-2\alpha = 1 \end{array} \qquad v = [4,-2,1]_{\mathcal{B}}$$

Zad. 3

a) $\mathcal{U} = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] : -3p(1) + 2p(0) = 0 \}$

Uzasadnij, że to podprz. liniowa $\mathbb{R}_2[x]$; generatory, baza, wymiar

- JEST to podprz. liniowa $\mathbb{R}_2[x]$

$\forall p,q \in \mathcal{U} \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ $\quad -3(\alpha p+\beta q)(1) + 2(\alpha p+\beta q)(0) =$

$= -3[\alpha \cdot p(1) + \beta \cdot q(1)] + 2[\alpha \cdot p(0) + \beta \cdot q(0)] =$

$= \alpha \cdot \underbrace{[-3p(1)+2p(0)]}_{=0 \text{ bo } p\in\mathcal{U}} + \beta \cdot \underbrace{[-3q(1)+2q(0)]}_{=0 \text{ bo } q\in\mathcal{U}} = \alpha\cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

$\Downarrow$

$\alpha p + \beta q \in \mathcal{U}$

- $p \in \mathbb{R}_2[x]$ $\quad p(x) = ax^2+bx+c$; $\quad a,b,c \in \mathbb{R}$

$p \in \mathcal{U} \Rightarrow 0 = -3p(1) + 2p(0) = -3\cdot[a+b+c] + 2\cdot c = -3a-3b-c \Rightarrow c = -3(a+b)$

$p \in \mathcal{U} \Rightarrow p(x) = ax^2+bx-3a-3b = a(x^2-3) + b(x-3)$

$\{x^2-3, x-3\}$ generatory $\mathcal{U}$ $\qquad \mathcal{U} = \text{lin}\{x^2-3, x-3\}$

ale i baza, bo są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim \mathcal{U} = 2$

b) $\mathbb{R}_3[x] \supset W = \text{lin}\{p,q,r,s\}$ $\qquad p(x) = x^2+x-1$, $q(x) = 2x^3+x^2+5x-2$, $r(x) = x^3+3x-5$, $s(x) = x^2+2x+2$

$\dim W = ?$

$$r\begin{bmatrix} 0&1&1&-1\\ 2&1&5&-2\\ 1&0&3&-5\\ 0&1&2&2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1&0&3&-5\\ 0&1&1&-1\\ 0&1&2&2\\ 2&1&5&-2 \end{bmatrix} \underset{\substack{w_4-w_1\\ w_3-w_2}}{=} r\begin{bmatrix} 1&0&3&-5\\ 0&1&1&-1\\ 0&0&1&-3\\ 0&1&-1&8 \end{bmatrix} \underset{w_4-w_2}{=} r\begin{bmatrix} 1&0&3&-5\\ 0&1&1&-1\\ 0&0&1&-3\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{-2}&\cancel{9} \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \dim W = 3$$

c) $a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ Kiedy $\{p,q,r\}$ jest bazą $\mathbb{R}_2[x]$?

$p(x) = x^2-2x+3$, $\quad q(x) = 2x^2-x+1$, $\quad r(x) = x^2+ax+a$

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3 \Rightarrow \{p,q,r\}$ baza $\mathbb{R}_2[x]$ wtw gdy $r\begin{bmatrix} 1&-2&3\\ 2&-1&1\\ 1&a&a \end{bmatrix} = 3$

$$r\begin{bmatrix} 3&-2&1\\ 1&-1&2\\ 1&a&a \end{bmatrix} \underset{w_3-w_2}{\overset{w_1-3w_2}{=}} r\begin{bmatrix} 0&1&-5\\ 1&1&2\\ 0&a+1&a-2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1&1&2\\ 0&1&-5\\ 0&a+1&a-2 \end{bmatrix} \overset{w_3-w_2}{=} r\begin{bmatrix} 1&1&2\\ 0&1&-5\\ 0&a&a+3 \end{bmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1&1&2\\ 0&1&-5\\ 0&a&a+3 \end{vmatrix} = a+3+5a \neq 0$$

$6a+3 \neq 0$

$a \neq -1/2$

Zad. 4 $p(x) = 1+x$, $q(x) = 2-3x$, $r(x) = 3-x+5x^2$

a) $\mathcal{B}' = (p, q, r)$ to baza $\mathbb{R}_2[x]$

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, zatem $\mathcal{B}'$ to baza jeśli tylko układ $\{p, q, r\}$ jest liniowo niezależny

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \underset{w_3 - 3w_1}{\overset{w_2 - 2w_1}{=\!=}} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} = 3 \quad \text{bowiem} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

$\mathcal{B}_K = (1, x, x^2)$

b) $P = P_{\mathcal{B}_K \to \mathcal{B}'}$ $p = [1, 1, 0]_{\mathcal{B}_K}$ $q = [2, -3, 0]_{\mathcal{B}_K}$, $r = [3, -1, 5]_{\mathcal{B}_K}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

c) $w = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}x - 5x^2$ $w = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}'} = ?$ $w = [\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, -5]_{\mathcal{B}_K}$

$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ -5 \end{bmatrix}$ $X' = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ $PX' = X$

$X' = P^{-1}X$

$P^{-1} = ?$ ĆWICZENIE! $P^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & -7 \\ 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{25}$

$$X' = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 15 & 10 & -7 \\ 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ -5 \end{bmatrix} \overset{\text{ćw}}{=\!=} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zad. 5 Prawda / fałsz

a) Każda podprz. liniowa zawiera wektor zerowy. PRAWDA

b) Dowolna baza $\mathbb{R}_5[x]$ jest 5-elementowa. FAŁSZ $\dim \mathbb{R}_5[x] = 6$

c) $\dim M_{3\times5}(\mathbb{R}) = 15$ PRAWDA $3 \cdot 5 = 15$